معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

البنى الجبرية1

المحاضرة14

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

نظري

◄ دكتور المادة: فادي أبو حرب

◄ المحاضرة : الرابعة عشر ◄ عنوان المحاضرة: الزمرة الدوارة

سنأخذ في هذه المحاضرة:

1- مبرهنة لاغرانج.
2- الزمرة الدوارة.
3- تعريف مرتبة عنصر في زمرة.
4- مبرهنات.
5- أمثلة وتمارين.

مبرهنة لاغرانج:

لتكن Gزمرة منتهية و H زمرة جزئية من G عندئذٍ:

$$(G:1) = (G:H)(H:1)$$

البرهان:

لنفرض أن $a_1H, a_2H , \dots a_nH$ جميع المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة الجزئية H في G وبما ان المجموعة:

$$M_l = \{a_iH : 1 \leq i \leq n\}$$

تشكل تجزئة للزمرة G فإن: $\quad G = a_1H \cup a_2H \cup \dots \cup a_n H$

ومنه: $(G:1) = card\ a_1H + card\ a_2H + \cdots .. + card\ a_nH$

وبما ان $card\ a_1H = card\ H$ (حسب المبرهنة السابقة)

$$(G:1) = n. card\ H$$

حيث n عدد مرافقات H و $card\ H$ عدد عناصر H

$$(G:1) = (G:H).(H:1)$$

الزمرة الدوارة:

تعريف:

نقول عن الزمرة G انها دوارة اذا وجد $a \in G$ بحيث $G =< a >$ وفي هذه الحالة نقول ان الزمرة G

مولدة بالعنصر a ونسمي العنصر a مولداً للزمرة G

$$a^n \in Z \,; n \leq G \leq a$$

تمهيدية:

لتكن G زمرة و $a \in G$ عندئذٍ : $G =< a >= < a^{-1} >$

أمثلة:

1) زمرة الاعداد Z هي زمرة دوارة مولدة ب 1

2) الزمرة $Z_n = \{0,1,2, \dots n-1\}$

هي زمرة دوارة مولدة ب1

ملاحظة: حسب مبرهنة سابقة وبما ان: $-1 = n - 1$

مثلا في الزمرة $Z_8 = \{0,1, \dots ,7\}$ فإن $Z_8 =< 1 > =< 7 >$

3) في الزمرة $U(10) = \{1,3,7,9\}$ نلاحظ ان $U(10) =< 3 > =< 7 >$

ان:

$\mathbf{3^0 = 1}$	$\mathbf{7^0 = 1}$
$3^1 = 3$	$\mathbf{7^1 = 7}$
$3^2 = 9$	$\mathbf{7^2 = 9}$
$3^3 = 7$	$\mathbf{7^3 = 7^2 . 7 = 9 . 7 = 3}$

4) تمرين: أوجد مولدات الزمرة $u(8)$

الحل:

$$U(8) = \{1,3,5,7\}$$

$$5^0 = 1$$

$$5^1 = 5$$

$$5^2 = 1$$

$$5^3 = 5$$

نتيجة: الزمرة $U(n)$ ليست دوارة في الحالة العامة.

مبرهنة:

كل زمرة دوارة هي زمرة تبديلية.

البرهان:

$$\forall a, b \in G : a.b = b.a$$

وظيفة...

تعريف (مرتبة عنصر في زمرة):

لتكن G زمرة و $g \in G$ نسمي اصغر عدد صحيح موجب n من اجل $g^n = e$ بمرتبة العنصر g ونرمز له بالرمز $o(g)$ ونقول في هذه الحالة ان العنصر g ذو مرتبة منتهية ونقول عن العنصر g انه ذو مرتبة غير منتهية.

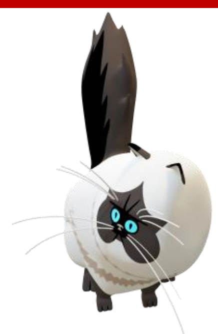
اذا كان $g^n \neq e , \forall n \in N^*$ ونعبر عن ذلك $o(g) = \infty$

مثال:

لنأخذ الزمرة $U(15)$ ولنحسب مرتبة العنصر 7

الحل:

$$U(15) = \{1,2,4,7,8,11,13,14\}$$



$$7^1 = 7$$

$$7^2 = 4$$

$$7^3 = 7^2.7 = 4.7 = 13$$

$$7^4 = 13.7 = 9^1 = 1$$

ومنه $o(7) = 4$

كذلك نجد بالحساب ان:

$o(1) = 1$ | $o(11) = 2$

$o(8) = 4$ | $o(4) = 2$

$o(13) = 4$ | $o(2) = 4$

$$o(14) = 2$$

مثال: (2): في الزمرة $Z_{10} = \{0, \dots 9\}$

نجد ان $o(2) = 5$

وبطريقة مشابهة نوجد مراتب عناصر الزمرة Z_{10}

$$2.2 = 2 \oplus 2 = 4$$

$$3.2 = 2 \oplus 2 \oplus 2 = 6$$

$$4.2 = 2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2 = 8$$

$$5.2 = 2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 2 = 0$$

مبرهنات بدون برهان:

1) ليكن G زمرة و $a \in G$ مرتبة n

$$o(a) = n$$

عندئذٍ القضايا التالية صحيحة:

1- أياً كان العدد صحيح s حيث $s \geq 1, n \geq s$ فإن $o(a^s) = o(a^{n-s})$

2- اذا وجد $k \in Z$ بحيث $a^k = e$ فإن n يقسم k

3- أياً كان العدد صحيح t الذي يقسم n فإن $o\left(a^{\frac{n}{t}}\right) = t$

4- اذا كانت $G =< a >$ فإن $o(a) = o(G:1) = n$

مبرهنة (2):

ليكن $G =< a >$ زمرة دوارة منتهية مرتبتها n مولدة بالعنصر a عندئذٍ الشروط التالية متكافئة:

1- $G =< a^k >$ حيث $k \in Z$

2- $gcd(n,k)=1$ أي ان العنصرين n,k اولين فيما بينهما.

نتيجة:

في الزمرة $Z(n)$ كل عنصر $k \in Z_n$ يكون مولداً للزمرة Z_n عندما وفقط عندما $gcd(n,k)=1$

مثال:

في الزمرة Z_8 وجدنا سابقاً أن:

$$Z_8 =< 1 > =< 7 >$$

وحسب النتيجة السابقة $Z_8 =< 5 > =< 3 >$

مبرهنة (3):

لتكن $G =< a >$ زمرة دوارة مولدة من العنصر a إذاً القضايا التالية صحيحة:

1- أي زمرة جزئية من G تكون دوارة.
2- اذا كانت G منتهية ومرتبتها n وكانت $k \in Z$ يقسم n فإنه توجد في G زمرة جزئية واحدة فقط مرتبتها k وهي $< a^{n/k} >$

مبرهنة (4) :

كل زمرة منتهية مرتبتها عدد اولي تكون دوارة.

مبرهنة(5):

لتكن G زمرة منتهية مرتبتها n القضايا التالية صحيحة:

1- أياً كان $a \in G$ فإن $a^n = e$
2- أياً كان $a \in G$ فإن $o(a)$ تقسم n

انتهت المحاضرة

إعداد: وئام النمر، ولاء الأخضر، أبرار الخالد