معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثالثة

التحليل العقدي 1

المحاضرة 15

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

◄ دكتور المادة: محمد الشيخ

◄المحاضرة: السادسة عشر عنوان المحاضرة : والمتسلسلات العقدية

مبرهنة

تكون متسلسلة عقدية $\sum z_n$ متقاربة إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,;\, \exists N_\varepsilon > 0 : \forall\, m > n \geq N \Rightarrow |z_{n+1} + \cdots + z_m| < \varepsilon$$

الأثبات

بفرض أن $\sum z_n$ متسلسلة عقدية متقاربة ولتكن $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum z_n$ عندئذ

$$\sum z_n \overset{\text{تعريفاً}}{\Longleftrightarrow} \text{متقاربة} \Leftrightarrow \{S_n\}\ \text{متقاربة} \Leftrightarrow \{S_n\}\ \text{كوشية}$$

$$\forall \varepsilon > 0; \exists(\varepsilon) > 0\,; \forall\, m > n > N; |S_m - S_n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |z_n + z_{n+1} + \cdots + z_m| < \varepsilon$$

توضيح:

$$S_m = z_{n_0} + z_{n_0+1} + \cdots + z_n + z_{n+1} + \cdots + z_m$$

$$S_n = z_{n_0} + z_{n_0+1} + \cdots + z_n$$

بالطرح نجد

$$S_m - S_n = z_{n+1} + \cdots + z_m$$

-اذا كان الحد العام لـ $\sum z_n$ أي z_n مساويا $x_n + i\, y_n$ فإننا نسمي المتسلسلة الحقيقة $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ لمتسلسلة الأجزاء الحقيقية لـ $\sum z_n$ كما نسمي $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ متسلسلة الأجزاء التخيلية لـ $\sum z_n$

مبرهنة

تكون المتسلسلة العقدية $\sum(x_n + i\,y_n)$ متقاربة ومجموعها S إذا وفقط إذا كانت متسلسلتا الأجزاء الحقيقية والتخيلية لها متقاربة أي بصياغة أخرى :

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ متقاربة و مجموعها } Re\, s \\ \sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ متقاربة و مجموعها } Im\, s \end{pmatrix}$$

الأثبات

لتكن $\{S_m\}$ متتالية المجاميع الجزئية

لـ $\sum_{n=n_0}^{\infty}(x_n + i\,y_n)$ وليكن $\{\alpha_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$

وليكن $\{\beta_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=n_0}^{\infty} y_n$ عندئذ

$$S_n = \left(x_{n_0} + i\,y_{n_0}\right) + \cdots + (x_n + iy_n)$$

$$= \left(x_{n_0} + \cdots + x_n\right) + i\,\left(y_{n_0} + \cdots + y_n\right)$$

$$= \alpha_n + i\,\beta_n$$

في المتتاليات تعرف متتالية عقدية متقاربة إذا وفقط إذا كانت الأجزاء العقدية والتخيلي لها متقاربة

$\Leftarrow \sum_{n=n_0}^{\infty}(x_n + i\,y_n)$ متقاربة $\Leftrightarrow \{S_n\}$ متقاربة $\overset{\text{حسب مبرهنة}}{\Leftrightarrow}$ في المتتاليات تعرف متتالية عقدية متقاربة إذا وفقط إذا كانت الأجزاء العقدية والتخيلي لها متقاربة ($\{\beta_n\}, \{\alpha_n\}$ متقاربتان)

$\Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ ، $\sum_{n=n_0}^{\infty} y_n$ متقاربتان وفي حال التقارب

فإن المجموع $\sum_{n=n_0}^{\infty}(x_n + i\,y_n) = S$

وهذا يكافئ أن $S_n \longrightarrow S$ يكافئ $\begin{Bmatrix} \alpha_n \to Re\, s \\ \beta_n \to Im\, s \end{Bmatrix}$ وهذا سيكافئ $\begin{Bmatrix} \sum_{n=n_0}^{\infty} x_n = Re\, s \\ \sum_{n=n_0}^{\infty} y_n = Im\, s \end{Bmatrix}$

تنويه :

الخاصية التجميعية في للمجموع المنتهي فقط فإذا كان المجموع غير منتهي لا نستخدم الخاصة التجميعية والجمع الغير منتهي ليس بالضرورة أن يكون تبديلي

أمثلة لبيان دراسة تقارب متسلسلة عقدية :

ادرس تقارب المتسلسلات التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+i\frac{1}{n^2}\right)$$

إن هذه المتسلسلة متباعدة لأن متسلسلة الأجزاء الحقيقية لها هي $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة واذا تباعدت احدى المتسلسلتين فالمتسلسلة الأساسية متباعدة

> تذكرة
>
> 1- $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^p}$
>
> متباعدة إذا كانت $P \leq 1$ ومتقاربة إذا كانت $P > 1$
>
> 2- $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n}$
>
> متباعدة ولكن حدها العام متقاربة على الصفر

تنويه : المتتالية التي حدها العام $\frac{1}{n}$متقاربة وتسعى للصفر لكن المتسلسلة $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n}$التي حدها العام $\frac{1}{n}$متباعدة

كما نعلم سابقاً أن لو سعى الحد العام إلى الصفر فليس بالضرورة أن تكون المتسلسلة متقاربة

وقد مر ذلك سابقا من خلال المثال : $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})i$

<u>**تمرين**</u> :

ادرس تقارب المتسلسلة وفي حال التقارب أوجد المجموع $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+i\,\frac{1}{n!}\right)$

متسلسلة الأجزاء الحقيقية $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ هندسية

أساسها $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة ومجموعها

$$S_1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

ومتسلسلة الأجزاء التخيلية لها $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ إنها متقاربة

نعلم أن

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

نعوض $x = 1$

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

فالمتسلسلة العقدية $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + i\,\frac{1}{n!}\right)$ متقاربة ومجموعها يساوي $(1 + ie)$

مبرهنة :

إذا كانت $\sum_{n=n_0}^{\infty} z_n$،$\sum_{n=n_0}^{\infty} W_n$ متسلسلتين متقاربتين فإن متسلسلة المجموع لهما $\sum_{n=n0}^{\infty}(z_n + W_n)$ متقاربة وفي حال التقارب فإن $\sum_{n=n0}^{\infty}(z_n + W_n) = \sum_{n=n_0}^{\infty} z_n + \sum W_n$.

الإثبات :

لنفرض أن $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=n_0}^{\infty} z_n$

$\{T_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية لـ $\sum_{n=n_0}^{\infty} W_n$

$$v_n = (z_{n0} + w_{n0}) + (z_{n0+1} + w_{n0+1}) + \cdots + (z_n + w_n)$$

$$= (z_{n0} + z_{n0+1} + z_{n0+2} + \cdots + z_n) + (w_{n0} + w_{n0+1} + w_{n0+2} + \cdots + w_n)$$

$$v_n = S_n + T_n \to S + T$$

$\Leftarrow\sum_{n=n0}^{\infty}(z_n+W_n)$ متقاربة ومجموعها يساوي $S+T$.

$$\sum_{n=n0}^{\infty}(z_n+W_n)=\sum_{n=n0}^{\infty}z_n+\sum_{n=n_0}^{\infty}W_n$$

والعكس في الحالة العامة غير صحيح :

فقد تكون متسلسلة المجموع لمتسلسلتين متباعدتين متسلسلة متقاربة .

مثال: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ ،$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}$ كلاهما متسلسلة متباعدة حدها العام لا يسعى إلى الصفر إلا أن :

$$\sum_{n=0}^{\infty}((-1)^n+(-1)^{n+1})=\sum_{n=0}^{\infty}0=0$$

وهي متسلسلة متقاربة .

مبرهنة : لتكن $\sum z_n$ متسلسلة عقدية ، λ ثابت عقدي غير معدوم

$\sum 3_n$ متقاربة $\Leftrightarrow$ $\sum(\lambda z_n)$ متقاربة .

وفي حال التقارب نستطيع أن نكتب $\sum(\lambda z_n)=\lambda\sum z_n$

مثال :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+i\frac{n}{2n^3+3}\right)$$

إن هذه المتسلسلة متقاربة لأن متسلسلة الأجزاء الحقيقية متقاربة $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2})$متسلسلة ريمانية $p=2>1$فهي متقاربة

ومتسلسلة الأجزاء التخيلية $\frac{n}{2n^3+3}$متقاربة وهي متسلسلة حدها العام تابع كسري أي حاصل قسمة كثيري حدود حيث درجة المقام مطروح منها درجة البسط يساوي 2 أكبر تماما من 1

انتهت المحاضرة