معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثالثة

نظرية الاحتمالات

المحاضرة 7

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية - جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف - واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

نظري

◄ دكتور المادة: أحمد الغصين

◄ المحاضرة: السابعة ◄ عنوان المحاضرة: توزيعات احتمالية

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-تقريب ذي الحدين إلى بواسون

2-التوزيع الهندسي

3-توزيع باسكال

ـ تقريب توزيع ذي الحدين بتوزيع بواسون :

إذا كانت n كبيرة في توزيع ذي الحدين وكان p (قيمة الاحتمال) صغيرة عندئذٍ يمكن أن نضع : $\lambda = np$

أي نستبدل الوسيط λ بالمتوسط ونحسب قيمة الاحتمال .

البرهان :

ـ نأخذ الدالة المولدة للعزوم للمتحول التابع لتوزيع ذي الحدين :

$$M_B(t) = (q + pe^t)^n$$

ـ ونأخذ الدالة المولدة للعزوم لتوزيع بواسون :

$$M_p(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

من الفرض نجد أن :

$$p = \frac{\lambda}{n}$$

نعوض p بما يساويها في الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الثنائي نجد :

$$M_p(t) = \left[q + \frac{\lambda}{n} e^t \right]^n \quad ; \; q = 1 - p$$

$$= \left[1 - p + \frac{\lambda}{n} e^t \right]^n$$

$$= \left[1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} e^t \right]^n$$

$$M(t) = \left(1 + \frac{\lambda\,(e^t - 1)}{n} \right)$$

نأخذ نهاية هذا المقدار عندما n تسعى إلى اللانهاية $(n \longrightarrow \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} M_p(t) = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{\lambda(e^t - 1)}{n} \right]^n = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

مثال :

في مشفى ما طعم (2000) شخص بمضاد حيوي فإذا كان احتمال أن يعاني مريض برد فعل هو $p = 0.001$

المطلوب : ـ أوجد احتمال ان يعاني برد فعل سيء :

1- ثلاثة أشخاص .

2- شخصين فأكثر .

الحل :

بفرض أن x عدد الأشخاص الذين يعانون رد فعل سيء .

فإن x يتبع توزيع ذي الحدين بمعالم :

$$p = 0.001\,, \quad n = 2000$$

دالته الاحتمالية :

$$f(x) = C_x^{\,2000}\ (0.001)^x\ (0.999)^{2000-x}$$

$$;\quad x = 0\,,1,2,\dots,2000$$

لاشك ان حساب أي احتمال باستخدام هذه الدالة عملية شاقة لذلك نستخدم توزيع بواسون كتقريب جيد لتوزيع ذي الحدين بوسيط :

$$\lambda = np = (2000)(0.001) = 2$$

دالته الاحتمالية :

$$f(x) = e^{-2}\,\frac{(2)^x}{x!} \qquad ; x = 0\,,1,2,\dots.$$

ويكون المطلوب :

1- $$p(x = 3) = f(3) = \frac{e^{-2}\,2^3}{3!} = 0.18$$

2- $$p(x \geq 2) = 1 - p(x < 2)$$

$$= 1 - p(x = 0) - p(x = 1)$$

$$= 1 - e^{-2} - 2e^{-2}$$

$$= 1 - 3e^{-2} = 0.59$$

في نظرية الاحتمالات تعطينا قيم يمكن تطبيقها في الميكانيك والمعادلات التفاضلية وذلك باستخدام توزيع ذي الحدين وبواسون .

هذه العلاقة تدعى معاملي اللتواء والتفلطح :

$$a_3 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

$$a_4 = 3 + \frac{1-6pq}{npq}$$

((حيث a_0 , a_1 , a_2 مركزية))

التوزيع الهندسي :

تعريف : يقال عن متحول عشوائي منقطع x أنه يتبع الهندسي إذا كانت دالته الاحتمالية من الشكل :

إما : $f(x) = p(1-p)^{x-1} \quad ; x = 1,2, \ldots$

أو : $f(x) = pq^{x-1} \quad ; \ 1-p = q$

$$0 \le p \le 1$$

ـ إن هذه الدالة موجبة ومجموع قيم هذه الدالة تساوي الواحد .

$$\sum_{x=1}^{\infty} p(1-p)^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1}$$

$$= \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

إن $f(x)$ هي دالة احتمالية ، وقد سمي بالتوزيع الهندسي ، لأن احتمالات قيم المتحول x المختلفة تناظر حدود متتالية هندسية متناقصة ، هذا واضح لأن :

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{pq^x}{pq^{x-1}} = q < 1$$

أي أن الحدود المتتالية متناقصة يستخدم في التجارب التي لها نتيجتين وتتكرر عدد المحاولات حتى الحصول على أول نجاح .

الدالة التراكمية :

$$F(X) = p(X \leq x) = 1 - q^2 = \sum_{s=0}^{x} f(s)$$

متوسطه (التوقع الرياضي) :

المتوسط $\mu = E(X) = \frac{1}{p}$

التباين $\sigma^2 = V(x) = \frac{q}{p^2}$

استنتاج هذه الدالة :

$$\sum_{x=1}^{\infty} x\, q^x = q\,(1 + 2q + 3q^2 + \cdots)$$

$$= \frac{q}{(1-q)^2}$$

نشتق هذه العلاقة بالنسبة لِـ q نحصل على :

$$\sum_{x=1}^{\infty} x^2\, q^{x-1} = \frac{1+q}{(1-q)^3}$$

نضرب الطرفين بـ p ومنه :

$$\sum_{x=1}^{\infty} x^2\, p\, q^{x-1} = p\,\frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{(1-q)^2}$$

وبالتالي نحصل على :

$$E(x^2) = \frac{1+q}{p^2}$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2$$

$$= E(x^2) - \mu^2$$

$$= \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

وهو المطلوب . .

الدالة المولدة للعزوم :

$$M_x(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

استنتاج هذه الدالة :

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx}\, p\, q^{x-1}$$

$$= p\, e^{tx} \sum_{x=1}^{\infty} (e^t q)^{x-1} = p\, \frac{e^t}{1-qe^t}$$

الدالة المولدة للاحتمالات :

$$G(t) = E(t^x) = \frac{tp}{1-tp}$$

توزيع ذي الحدين السالب أو توزيع باسكال :

تعريف : يقال عن المتحول العشوائي المنقطع x أنه يتبع توزيع ذي الحدين السالب بوسطاء $r\ ,p$ إذا كانت دالته الاحتمالية من الشكل :

$$f(x) = C\begin{matrix} r+x-1 \\ r-1 \end{matrix} \quad p^r \ q^x \qquad ; x = 0,1,2, ...$$

$$q = 1 - p$$

$$0 \le p \le 1$$

هذه الدالة موجبة ومجموعها يساوي الواحد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x) = p^r \ (1-q)^{-r} = 1$$

وقد سميت بهذا الاسم لأن حدود منشورها $p^r\ (1-q)^{-r}$ تناظر احتمالات قيم x المتتالية

يطبق هذا التوزيع في التجارب التي لها نتيجتين فقط .

أن نحصل على r نتيجة فقط هما نجاح أو فشل .

وبفرض أن هذه التجربة تتكرر حتى نحصل على (r) نجاح .

مثال (1) :

لاعب يقرر الاعتزال عندما يبلغ عدد مرات فوز فريقه 20 فتكون

$r = 20$ ، x عدد مرات خسارة الفريق فيكون $(x+r)$ عدد مرات لعب الفريق حتى يحصل على النتيجة المطلوبة لاعتزال اللاعب .

مثال (2) :

أيضاً يستخدم في حالات تنظيم الإنجاب مثلاً بعد إنجاب 2 أطفال ذكور لعائلة توقف الإنجاب أي $r = 2$ حيث x عدد مرات ولادة طفلة أي $x \div r$ عدد مرات الوضع حتى يتم المطلوب وهكذا .

صفات هذا التوزيع :

ـ المتوسط (التوقع الرياضي) :

$$\mu = E(x) = \frac{rq}{p}$$

ـ التباين :

$$\sigma^2 = V(x) = \frac{rq}{p^2}$$

$$E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} xf(x) = \sum x \ C_{r-1}^{r+x-1} \ p^r \ q^s$$

$$E(\,x(x-1)) = \sum_{s=0}^{\infty} x(x-1)\, C_{r-1}^{r+x-1} \ p^r \ q^s$$

الدالة التراكمية :

$$F(X) = p(X \leq x) = \sum_{1}^{x} C_{r-1}^{r+s-1} \ p^r \ q^s$$

الدالة المولدة للعزوم :

$$M_x(t) = p^r\,(1 - qe^t)^{-r}$$

دالة المولدة للاحتمالات :

$$G(t) = p\,(1 - qt)^r$$

تمرين :

قررت طالبة تنظيم التقدم للاحتمالات إذا نجحت في خمس مقررات رياضية ، فإذا كان احتمال النجاح في مادة الرياضيات هو 0.4 أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد مرات رسوبها في المقررات الأخرى .. ثم احسب المتوسط والانحراف ..