معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثالثة

نظرية الاحتمالات

المحاضرة 1و2

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

نظري

◄ دكتور المادة: أحمد الغصن

◄ المحاضرة: الأولى و الثانية ◄ عنوان المحاضرة: مقدمة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-مفردات المقرر

2-مبادئ أولية في الاحتمالات

3-قيم مميزة للمتغير العشوائي

مفردات المقرر:

الفصل الأول : مبادئ أولية في الاحتمالات .

الفصل الثاني : التوزيعات الاحتمالية .

الفصل الثالث : الأشعة العشوائية .

الفصل الرابع : الدوال في المتحولات العشوائية .

الفصل الخامس : الأشعة الاحتمالية و المصفوفات العشوائية .

الفصل السادس : تطبيقات في نظرية الاحتمالات .

((أهم الفصول الرابع و الخامس و السادس))

الفصل الأول : مبادئ أولية في الاحتمالات .

تذكرة :

المتحول العشوائي : عبارة عن دالة بين مجموعتين مجموعة أولى s ومجموعة ثانية R تدعى S فضاء العينة وتدعى R مجموعة الأعداد الحقيقية ونرمز لها بـ :

$$X : \; S \longrightarrow R$$

فضاء العينة : هي مجموعة النتائج أو المشاهدات التي يمكن رؤيتها لدى إجراء تجربة ما .

الحدث العشوائي : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة .

((هو الصورة العكسية لأي فترة محدودة على المستقيم R))

الحدث البسيط : هو الحدث الذي يتألف من نتيجة واحدة .

للمتحول العشوائي نوعان : 1) متحول عشوائي نقطي (منقطع) .

2) متحول عشوائي مستمر .

النوع الأول : المتحول العشوائي المنقطع : هو المتحول الذي يأخذ قيماً تنتمي إلى مجموعة منتهية أو مجموعة قابلة للعد $X : 1 , 2 , 3 , 4 \, . \, ...$

النوع الثاني : المتحول العشوائي المستمر : هو المتحول الذي يأخذ قيم تنتمي إلى مجموعة لا نهائية وغير قابلة للعد .

((لكل متحول عشوائي له جدول توزيع ..))

الدالة الاحتمالية : إذا كان المتحول العشوائي منقطعاً ونرمز لهذه الدالة بـ $F(X)$

دالة الكثافة الاحتمالية : إذا كان المتحول العشوائي مستمراً ونرمز لها بـ $F(X)$

((لكل قيمة يوجد لها قيمة احتمالية ..))

$$F_X(x) = p(X = x)$$

المتحول منقطعاً (نقطي)

$$f(x) \geq 0$$

$$\sum_x f(x) = 1$$

المتحول مستمراً

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

تمرين (1) : ليكن لدينا : $0 \le x \le 4$: $f(x) = \frac{1}{8}\, x$

بين أن هذه الدالة هي دالة كثافة احتمالية ثم أوجد $p(1 \le x \le 2)$, $p(x \le 1)$

الحل :

$$p(1 \le x \le 4) = \int_0^4 \frac{1}{8}\, x\, dx = \frac{1}{16}[x^2]_0^4 = \frac{1}{16}(16) = 1$$

$$p(x \le 1) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{8}\, dx = [\frac{x^2}{16}]_0^1 = \frac{1}{16}$$

$$P(1 \le x \le 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{x}{8} dx = \left[\frac{x^2}{16}\right]_1^2 = \frac{3}{16}$$

((لكل متحول عشوائي أكثر من دالة احتمالية))

دالة التوزيع التراكمية لمتحول عشوائي :

$F(X)$ وهي دالة وحيدة

تعرف بـ $\forall x \in R$: $F(X) = p(X \le x)$

ـ إذا كان المتحول العشوائي منقطعاً :

$$F(X) = \sum_{x \le x_i} f(x_i)$$

ـ إذا كان المتحول العشوائي مستمراً :

$$F(X) \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

(سؤال دورة) ماهي صفات (خواص) دالة التوزيع التراكمية مع البرهان ؟

1.. هي دالة موجبة وهي دالة غير متناقصة .

بمعنى $x_1 , x_2 \in R$ وكان $x_1 < x_2$ فإن : $F(x_1) \le F(x_2)$

$$(X < x_1) \subset (X < x_2)$$

$$p(X < x_1) \leq p(X < x_2)$$

ومن تعريف دالة التوزيع التراكمية :

$$F(x_1) \leq F(x_2)$$

..2 $F(+\infty) = 1 \quad , \quad F(-\infty) = 0$

$F(-\infty) = P(X \leq -\infty) = P(\emptyset) = 0$ وهو حدث مستحيل

$F(+\infty) = P(X \leq +\infty) = 1$ وهو حدث أكيد

..3 دالة التوزيع التراكمية $F(X)$ مستمرة من اليمين :

$$\lim_{\propto \to 0}(F(x+\propto)) = F(x) \qquad : \propto > 0$$

((نأخذ هذه النتيجة من تعريف الدالة الاحتمالي وهي دالة مستمرة))

..4 دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ وحيدة لكل متحول عشوائي X .

..5 إذا كان x متحول عشوائي مستمراً وكان $a < b$ فإن :

$$p(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)\, dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx = F(b) - F(a)$$

((سؤال امتحاني)) :

مبرهنة : إذا كان X متحول عشوائي منقطعاً أو((مستمراً)) فإن دالة التوزيع التراكمية يمكن الحصول عليها من الدالة الاحتمالية لهذا المتحول أو ((دالة الكثافة الاحتمالية)) وبالعكس .

البرهان :

" $\Leftarrow$ " ليكن X متحول عشوائي منقطع

$$X : x_1, x_2, x_3 \dots\dots x_i, x_{i+1}, \dots\dots x_n$$

بالاحتمالات :

$$f(x_1)\,, f(x_2)\,, f(x_3) \ldots \ldots f(x_i)\,, f(x_{i+1})\,, \ldots \ldots f(x_n)$$

استناداً إلى تعريف دالة التوزيع التراكمية فإن : ((منقطع 😉))

$$F(X) = \sum_{x \le x_i} f(x_i)$$

" ⇒ " نبرهن العكس $f(x_i) = p(x = x_i)$

$$= F(x \le x_i) - F(x \le x_{i-1})$$

وبالتالي حصلنا على $F(x_i)$ معلوم مهما تكن i

أما في حالة كان المتحول مستمراً :

⇐ بنفس الطريقة وذلك في حالة الاستمرار وكانت $f(x)$ معلومة فإن $F(X)$:

$$F(X) = \underbrace{\int_{-\infty}^{x} \underbrace{f(t)}_{\text{معلومة}}\, dt}_{\text{نوجد التكامل فقط}}$$

⇒ ومنه تصبح $F(X)$ والعكس صحيح .

لنبرهن العكس :

من تعريف هذه الدالة :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$\frac{d(F(x))}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \right) = f(x)$$

تمرين : إذا كانت $f(x)$ دالة كثافة احتمالية :

$$f(x)=\begin{cases}0 & ;x\leq 0\\ \frac{1}{2}x & ;0\leq x\leq 2\\ 0 & ;x>2\end{cases}$$

أوجد دالة التوزيع التراكمية لهذه الدالة .

الحل :

$$F(X)=\begin{cases}0 & ;x\leq 0\\ \frac{x^2}{4} & ;0\leq x\leq 2\\ 1 & ;x>2\end{cases}$$

$$x<0 \quad \Longrightarrow \quad F(X)=0$$

$$0\leq x\leq 2 \;\Longrightarrow\; F(X)=p\,(x\leq x)=\int_0^x \frac{x}{2}\,dx=\frac{x^2}{4}$$

$$x>2 \;\Longrightarrow F(X)=p\,(\,X\leq x\,)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt \;+\; \int_0^2 f(t)dt \;+\; \int_2^{+\infty} f(t)dt$$

$$0+1+0=1$$

انتهت المحاضرة الأولى ..

ـ دالة غاما $\Gamma(n)$:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-x}\, dx = (n-1)!$$

هذه الدالة تدعى غاما تتبع إلى العدد الطبيعي N ، من هذا التعريف أن :

$$\Gamma_1(1) = 1$$

$$\Gamma_2(2) = 1$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

وإذا أجرينا على هذه الدالة تحويلات مثلثية نجد أن : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

ـ دالة بيتا $\beta(a,b)$:

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

هذه الدالة تدعى دالة بيتا .

هذه الدوال هي دوال رياضية وتستخدم عند حساب علاقة وتكامل ويقابلها في الاحتمال ما نسميه توزيع غاما / توزيع بيتا

مثال :

$$\int_0^1 x^3\,(1-x)^2\, dx = \beta(4,3) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(3)}{\Gamma(7)} = \frac{3!2!}{6!} = \frac{1}{60}$$

القيم المميزة لتوزيع المتحولات العشوائية :

عند دراسة أي توزيع احتمالي لمتحول عشوائي X يكون من الضروري أن تعطي وصفاً لقيماً قدر الإمكان لهذا المتحول ، ويتم الحصول عليه بتقديم بعض المفاهيم الرياضية ومنها :

1.. القيمة المتوقعة لمتحول عشوائي ((القيمة المتوقعة للتوزيع)) :

هي مقدار يقيس متوسط القيم التي يأخذها المتحول العشوائي ، فمثلاً يمكن أن نحدد قيمة مركزية للتوزيع الاحتمالي يمثل النقاط المختلفة لقيم المتحول X التي تتجمع حول هذه النقطة ، كما يمكن أن نحدد للتوزيع قيمة تقيس لنا تشتت أو تباين أو تباعد القيم المختلفة التي يأخذها المتحول العشوائي X عن النقطة المركزية ، كما يمكن أن نحدد قيمة تبين لنا الوضع التناظري للتوزيع بالنسبة للقيمة المركزية .

ولتقديم هذه المفاهيم بالتدريج و التي بالقيمة المتوقعة يمكن ان نستخدم مفهوم الوسط الحسابي .

تعريف : القيمة لمتوقعة للمتحول العشوائي (متوسط المتحول) :

ـ إذا كان X متحولاً عشوائياً (منقطعاً) يأخذ القيم $x_1 , x_2, \dots , x_n$ باحتمالات قدرها $f(x_1) , f(x_2), \dots , f(x_n)$ فإن القيمة المتوقعة للمتحول العشوائي و التي يرمز لها بالرمز $E(X)$ أو بالرمز μ التي تعطى بالعلاقة :

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, f(x_i)$$

بشرط أن يتقارب هذا المجموع تقارباً مطلقاً أي :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| f(x_i) < \infty$$

ـ إذا كان المتحول العشوائي (مستمراً) وكانت دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ فإن متوسط التوزيع أو القيمة المتوقعة للمتحول العشوائي X هي :

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

بشرط أن يتقارب التكامل تقارباً مطلقاً بمعنى :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f(x)dx < \infty$$

مثال : إذا كان X متغيراً عشوائي دالته الاحتمالية :

$$f(x) = p\, q^{x-1} \qquad ; \; x = 1, 2$$

حيث p مقدار ثابت ، و أن $\quad 0 \leq p \leq 1 \quad ; \quad q = 1 - p$

المطلوب : 1 ـ أثبت أن $f(x)$ دالة احتمالية .

2 ـ أوجد دالة التوزيع التراكمية $F(X)$ للمتغير العشوائي المنفصل X

3 ـ أوجد متوسط التوزيع .

4 ـ أوجد التمثيل البياني لهذا التوزيع .

الحل :

1ـ نلاحظ أن كل من p, q غير سالبتين فإن $f(x) \geq 0$ لجميع قيم x

$$\sum_{x} f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} p \, . q^{x} = p\,[\,1 + q + q^2 + q^3 + \cdots]$$

$$= \frac{p}{1-p} = \frac{p}{p} = 1$$

وهنا يؤكد أن $f(x)$ دالة احتمالية .

2ـ دالة التوزيع التراكمي :

$$F_X(X) = p[X \leq x] = p[X = 1] + p[X = 2] + p[X = 3] + \cdots$$

$$\ldots + p[X = n]$$

$$= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$$

$$= p + pq + pq^2 + \cdots + pq^{x-1}$$

$$= p(\,1 + q + q^2 + \cdots + q^{x-1}\,)$$

$$= \frac{p(1 - q^x)}{1 - q} = 1 - q^x \qquad ; x = 1,2, \ldots n$$

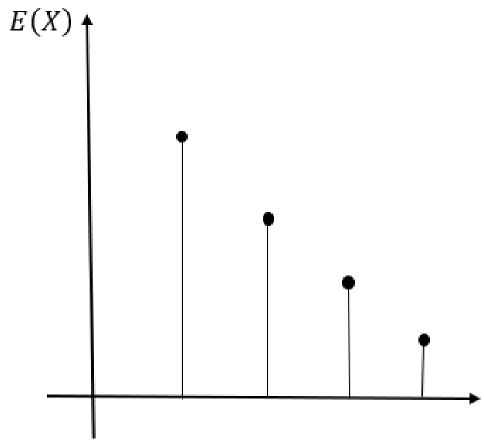
((ملاحظة : دالة التوزيع التراكمية لا يمكن أن تكون عدداً هي دالة وحيدة لكل متحول عشوائي))

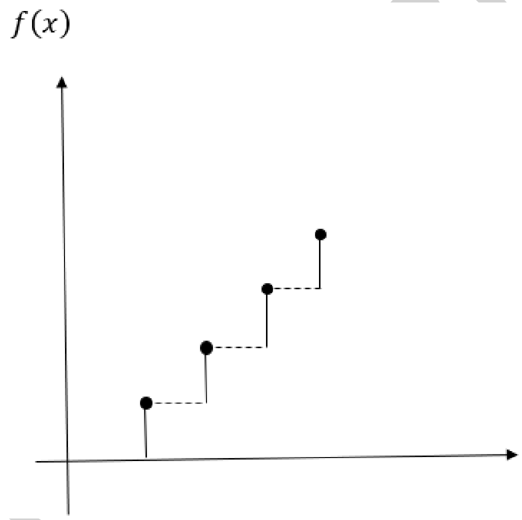
3ـ متوسط التوزيع :

$$\mu = E(X) \sum_{X=1}^{\infty} x\, p.q^{x-1} = p[1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + ..]$$

$$= \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

4 – التمثيل البياني للدالة الاحتمالية $f(x)$ ودالة التوزيع التراكمية $E(X)$ ؟؟





خصائص التوقع الرياضي :

1) التوقع الرياضي لأي مقدار ثابت يساوي نفس المقدار الثابت أي أنه إذا كانت α مقدار ثابت فإن :

$E(\alpha) = \alpha$ وذلك لأن :

$$E(\alpha) = \sum_i \alpha\, f(x_i) = \alpha \sum f(x) = \alpha$$

إذا كان المتحول منقطعاً

$$E(X) = \int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx = \alpha$$

إذا كان المتحول مستمراً .

(2 $E[ax+b] = a\,E(X) + b$

$$E(aX+b) = \int (aX+b)f(x)dx = a\int xf(x)dx + b\int f(x)dx$$

$$= aE(X) + b$$

وذلك إذا كان مستمر ، أما إذا كان منقطع :

$$E(ax+b) = \sum_i (\,ax_i + b)f(x_i)$$

(3 إذا كانت $g(x)$ دالة في X (متحول عشوائي) فإن :

$$E[ag(x)] = a\,E[g(x)]$$

(4 إذا كانت $g_1(X)$, $g_2(X)$ دالتين في X فإن :

$$E[\,g_1(X) + g_2(X)] = E[\,g_1(X)] + E[\,g_2(X)]$$

(5 إذا كان $X\,,Y$ متحولين عشوائيين على فضاء العينة S ذاته ، وكان $k \in R$ ثابتاً :

$$E(Y+X) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X+k) = E(X) + k$$

$$E(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots X_n\,) = E(X_1) + E(X_2) + \,..+ E(X_n)$$

مثال : ليكن X متحول عشوائي مستمر توزيعه f مقدار ثابت أي :

$$f(x) = \begin{cases} k & ; a \le x \le b \\ 0 & ; \text{غير ذلك} \end{cases}$$

المطلوب أوجد قيمة الثابت k حتى تكون $f(x)$ دالة احتمالية ، ثم أوجد $E(X)$

الحل : حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية يجب أن يكون التكامل موجب على مجال التحويلات يساوي الواحد :

وضوحاً نجد أن الدالة موجبة :

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \implies \int_a^b kdx = k(b-a) = 1$$

$$\implies k = \frac{1}{b-a}$$

$$\implies f(x) = \begin{cases} k = \dfrac{1}{b-a} & ; a \le x \le b \\ 0 & ; \text{غير ذلك} \end{cases}$$

ومن ثم نحسب التوقع $E(X)$:

$$E(X) \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

---

2 .. التباين :

يعتبر تباين المتحول العشوائي X من أهم الصفات التوزيعات الاحتمالية ويرمز له بـ أحد الرموز التالية : $Var(X)$, $V(X)$, ${\sigma_x}^2$, $\sigma^2(X)$

ويعرف بالشكل :

$$\sigma^2(X) = {\sigma_x}^2 = V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2$$

وعليه يكون :

$$\sigma^2 = \begin{cases} \sum_{x_i} (x_i - \mu)^2 f(x_i) & : \text{إذا كان } x \text{ منقطعاً} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) f(x) dx & : \text{إذا كان } x \text{ مستمراً} \end{cases}$$

بشرط أن يكون تقارب المجموع أو التكامل تقارباً مطلقاً .

ـ صيغة أخرى للتباين :

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$$
$$= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$$
$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \quad ; \mu = E(X)$$
$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$
$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 \quad ; \sigma^2 = Var(X)$$
$$\sigma_x{}^2 = E(X^2) - \mu^2 \quad \Longrightarrow \quad E(X^2) = \sigma_x{}^2 + \mu^2$$

هذه العلاقة مهمة في حل بعض التمارين والمبرهنات .

3 .. الانحراف المعياري :

يعرف الانحراف المعياري للمتحول العشوائي بأنه الجذر التربيعي الموجب للتباين أي:

$$\sigma = +\sqrt{V(X)}$$

كلما كانت قيمة الانحراف المعياري صغيرة كانت قيمة المتحول العشوائي متقاربة وقريبة من متوسط التوزيع ، وكلما كانت كبيرة تكون قيمة المتحول العشوائي مبعثرة ومتباعدة عن متوسط التوزيع .

مثال : أوجد تباين المتحول العشوائي وانحرافه للمعياري لـ :

$$f(x) = p.q^x \; ; \; x = 1,2 \ldots \qquad \text{((دالة احتمالية))}$$

حيث p مقدار ثابت ، $q = 1 - p \quad , \quad 0 \le p \le 1$

الحل :

نعلم أن :

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - \mu^2 \qquad ; \ \mu = E(X)$$

$$\sigma^2 = V(X) = E(x^2) - \left(E(X)\right)^2 \ \ldots\ldots *$$

((وقد أوجدنا فيما سبق التوقع $\mu = E(X) = \frac{1}{p}$))

لنوجد الآن :

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2\, p\, q^{x-1}$$

نفرض أن $S = \sum_{x=1}^{\infty} q^x = \frac{q}{1-q}$ (متسلسلة هندسية)

نفاضل الطرفين بالنسبة لـ q :

$$\frac{ds}{dq} = \sum_{x=1}^{\infty} x\,.\,q^{x-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

نضرب الطرفين بـ q :

$$\sum_{x=1}^{\infty} x\,.\,q^{x} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

نفاضل مرة ثانية بالنسبة لـ q :

$$\sum_{x=1}^{\infty} x^2\,.\,q^{x-1} = \frac{1+q}{(1-q)^3}$$

وبناءً على ذلك فإن :

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \ p \ q^{x-1} = p\,\frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{(1-q)^2} \quad ; p = 1-q$$

ومنه فإن التباين : (*)

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= \frac{1+q}{(1-q)^2} - \left(\frac{1}{1-q}\right)^2$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q}{p^2}$$

والانحراف المعياري :

$$\sigma = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

مثال : أوجد تباين المتحول العشوائي والانحراف المعياري

دالة كثافة احتمالية :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ; a \le x \le b \\ 0 & ; \text{غير ذلك} \end{cases}$$

(مثال سابق أوجدنا توقعه الرياضي)

الحل :

$$Var(X) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - \mu^2 ; \quad \mu = E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$Var(X) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{Var(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

بعض خواص التباين والانحراف المعياري :

- تباين المقدار الثابت يساوي الصفر : $V(\alpha) = 0$
- تباين جداء مقدار ثابت بالمتحول العشوائي يساوي جداء مربع المقدار الثابت : $V(\alpha x) = \alpha^2 V(x)$
- $V(x+y) \neq V(x) + V(y)$
- $V(x\,.\,y) \neq V(x)\,.\,V(y)$

أما خواص الانحراف المعياري :

- $\sigma(x+k) = \sigma(x)$
- $\sigma(kx) = k\,\sigma(x)$
- $\sigma(x+y) \neq \sigma(x) + \sigma(y)$
- $\sigma(x.y) \neq \sigma(x).\sigma(y)$

مثال : وظيفة : ألقي حجر نرد وليكن $x\,,y$ متحولين عشوائيين على نفس فضاء العينة $s = \{1,2,3,4,5,6\}$ حيث x متحول عشوائي يعني ضعفي الرقم الذي يظهر ، والمتحول y يدل على ظهور العدد 1 أو 3 حسب ما يكون العدد الظاهر فردي أو زوجي ، أوجد توقعه الرياضي والتباين والانحراف المعياري لكل من :

$$x \quad , \quad y \quad , \quad x+y \quad , \quad x.y$$

الحل :

x حدث ظهور ضعفي الرقم الذي يظهر .

$$x = \{2,4,6,8,10,12\}$$

جدول توزيعه :

x_i	2	4	6	8	10	12
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i\, f(x_i)$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{4}{6} + \frac{6}{6} + \frac{8}{6} + \frac{10}{6} + \frac{12}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

$$\Longrightarrow E(X) = 7 \qquad ;\ \mu = E(X) = 7$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{6} {x_i}^2\, f(x_i) - \mu^2 \qquad ;\ \mu^2 = 49$$

$$Var(X) = \left(\frac{2^2}{6}\right) + \left(\frac{4^2}{6}\right) + \left(\frac{6^2}{6}\right) + \left(\frac{8^2}{6}\right) + \left(\frac{10^2}{6}\right) + \left(\frac{12^2}{6}\right) - 49$$

$$= \frac{4 + 16 + 36 + 64 + 100 + 144}{6} - 49$$

$$\sigma(x) = \sqrt{11.66} = 3.4 \qquad \Longrightarrow \sigma(x) = 3.4$$

بالنسبة للمتحول y فإن : $y = \{\,1, 3\,\}$ وجدول توزيعه :

y_i	1	3
$f(y_i)$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$E(y) = \sum_{i=1}^{6} x_i\, f(x_i) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad ;\ E(x) = \mu = 2$$

$$Var(x) = \sum_{i=1}^{6} {x_i}^2 f(x_i) - \mu^2 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} - 4 = \frac{10}{2} - 4 = 1$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{1} = 1$$

$$(x+y)(s) = x(s) + y(s)$$

$$(x+y)(1) = x(1) + y(1) = 2 + 1 = 3$$

$$(x+y)(2) = x(2) + y(2) = 4 + 3 = 7$$

$$(x+y)(3) = x(3) + y(3) = 6 + 1 = 7$$

$$(x+y)(4) = x(4) + y(4) = 8 + 3 = 11$$

$$(x+y)(5) = x(5) + y(5) = 10 + 1 = 11$$

$$(x+y)(6) = x(6) + y(6) = 12 + 3 = 15$$

$$x + y = \{\, 3, 7, 11, 15 \,\}$$

$xi + yi$	3	7	11	15
$f(xi + yi)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{4} (xi + yi) f(xi + +yi) = \frac{3}{6} + \frac{14}{6} + \frac{22}{6} + \frac{15}{6}$$

$$E(x) = 9$$

$$Var(x+y) = \sum_{i=1}^{4} (xi + yi)^2 f(x_i) - \mu^2$$

$$V(x+y) = 14.6 \qquad , \sigma_{x+y} = 3.8$$

$$(x.y)(s) = x(s).y(s)$$

$$(x.y)(1) = x(1).y(1) = 2.1 = 2$$

$$(x.y)(2) = x(2).y(2) = 4.3 = 12$$

$$(x.y)(3) = x(3).y(3) = 6.1 = 6$$

$$(x.y)(4) = x(4).y(4) = 8.3 = 24$$

$$(x.y)(5) = x(5).y(5) = 10.1 = 10$$

$$(x.y)(6) = x(6).y(6) = 12.3 = 36$$

$x_i \cdot y_i$	2	6	10	12	24	36
$f(x_i \cdot y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(x.y) = \sum_{i=1}^{6} x_i\, y_i\, f(x_i y_i)$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{6}{6} + \frac{10}{6} + \frac{12}{6} + \frac{24}{6} + \frac{36}{6}$$

$$= \frac{90}{6} = 15 \qquad \Longrightarrow \quad E(x.y) = 15$$

نلاحظ أن : $E(x.y) \neq E(x).E(y)$

$$15 \quad \neq 14$$

$$Var(x.y) = \sum_{i=1}^{6} {x_i}^2\, {y_i}^2\, f(x_i \cdot y_i) = 134.3$$

$$Var(x.y) \neq V(x).V(y)$$

$$134.3 \neq 11.66$$

$$\sigma_{x.y} = \sqrt{V(x.y)} = \sqrt{134.4} = 11.6$$

$$\sigma_{x.y} \neq \sigma_x . \sigma_y \Longrightarrow 11.6 \neq 3.4$$

القيمة المتوقعة لأي دالة في المتحول العشوائي X :

إذا كان X متحولاً عشوائياً دالته الاحتمالية أو دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ وكان $y = g(X)$ دالة في X فإن y يكون متحولاً عشوائياً له دالة احتمالية أو دالة كثافة احتمالية ولتكن $h(y)$ يمكن الحصول عليها من الدالة $f(x)$ ولهذا تكون القيمة المتوقعة للمتحول y هي :

$$E(y) = \begin{cases} \sum_{x} y \ h(y) & \text{: منقطع} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} y \ h(y) \, dy & \text{: مستمر} \end{cases}$$

ـ ويمكن الحصول على القيمة المتوقعة للمتحول العشوائي y بطريقة أخرى باستخدام التوزيع الاحتمالي للمتحول العشوائي x وذلك بالشكل التالي :

$$E(y) = E\{g(y)\} = \begin{cases} \sum_{x_i} g(x_i) f(x_i) & \text{; منقطع} \\ \int g(x) f(x) dx & \text{; مستمر} \end{cases}$$

مثال : إذا كانت سرعة الرياح هي المتحول العشوائي X يتبع توزيع احتمالي دالة كثافة الاحتمالية :

$f(x) = \frac{1}{10} \quad ; 0 \leq x \leq 10$ وكان الضغط y على جناح الطائرة معطى بالعلاقة $y =$
$0.003x^2$ فأوجد متوسط الضغط على جناح الطائرة

الحل :

$$E(y) = E(0.003x^2)$$

$$= \int_{0}^{10} 0.003x^2 f(x)dx = \int_{0}^{10} 0.003x^2 \ \frac{1}{10} \ dx$$

$$= \frac{0.003}{10} \int_{0}^{10} x^2 \, dx \ = 0.1$$

انتهت المحاضرة الثانية ..

انتهت المحاضرة