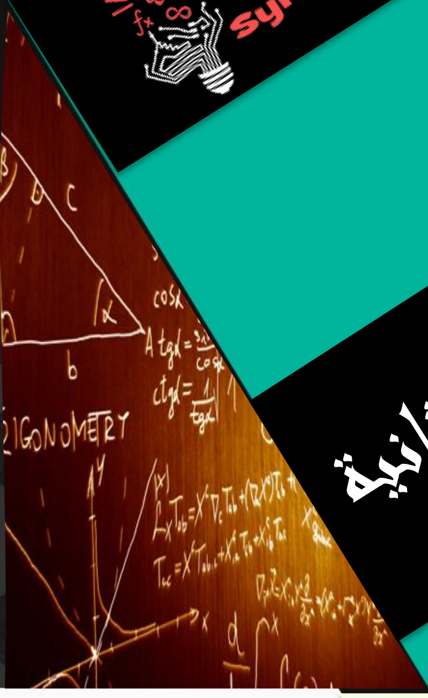
معك نحو

التخرج

Syria Math Team



السنة الثانية

البنى الجبرية1

المحاضرة16

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

◄ دكتور المادة: فادي أبو حرب

◄ المحاضرة : السادسة عشر

◄ عنوان المحاضرة: الزمرة الجزئية الناظمية وزمرة الخارج

تعريف :

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G نقول عن الزمرة الجزئية H انها ناظمية في G إذا تحقق الشرط:

$$\forall a \in G : aH = Ha$$

وينتج مباشرة من التعريف ان G و $< e >$ زمرة جزئية ناظمية على G . كل زمرة جزئية من زمرة تبديلية هي ناظمية.

مبرهنة: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G تكون الشروط التالية متكافئة:

1- الزمرة H ناظمية في G .
2- أياً كان $a \in G$ فإن $aHa^{-1} \subseteq H$
3- أياً كان $a \in G$ فإن $a^{-1}Ha \subseteq H$

البرهان:

$1 \Rightarrow 2$ $\quad \forall a \in G : aH = Ha$

$$aHa^{-1} = He$$

$$aHa^{-1} = H$$

ومنه $aHa^{-1} \subseteq H$

$2 \Rightarrow 3$

$$aHa^{-1} \subseteq H ,\forall a \in G$$

وبما ان $a^{-1} \in G$

$$a^{-1}H(a^{-1})^{-1} = a^{-1}Ha \subseteq H$$

$3 \Rightarrow 1$ $\quad \forall a \in G : a^{-1}Ha \subseteq H$

ونريد اثبات ان H ناظمية على G أي يجب اثبات ان :

$$aH = Ha \ ,\forall a \in G$$

$$a^{-1}Ha \subseteq H \ldots .(1) \qquad \forall a \in G$$

$$H \subseteq a^{-1}Ha \ldots ..(2)$$

من 1 و 2 نجد: $H = a^{-1}Ha$

$$\Rightarrow aH = Ha \Rightarrow H \text{ناظمية}$$

مبرهنة: لتكن G زمرة القضايا الاتية صحيحة:

1- تقاطع أي اسرة من الزمر الجزئية الناظمية في G هو زمرة جزئية ناظمية في G

2- الزمرة $Z(G)$ ناظمية في G حيث: $Z(G) = \{a : a \in G \, ; ax = xa\}, \forall x \in G$

ونسمي هذه الزمرة بمركز الزمرة G

3- لتكن H, k زمرتين جزئيتين في G بحيث $k \subseteq H$ اذا كانت الزمرة K ناظمية في G فإن k ناظمية في H

4- اذا كانت H زمرة جزئية في G و $(G:H) = 2$ عندئذٍ تكون H ناظمية في G

الاثبات:

1- لتكن $\{M_i \, ; i \in I\}$ اسرة من الزمر الجزئية الناظمية في G وجدنا سابقاً $M = \cap_{i \in I} M_i$ زمرة جزئية في G لنبرهن ان $\forall g \in G \, ; gmg^{-1} \subseteq M$ اياً كان $x \in gmg^{-1}$ فإنه يوجد $z \in M$ بحيث $x = gzg^{-1}$ فإن $x = zgg^{-1} \Leftarrow x = z \Leftarrow x \in M$ فتكون $M = \bigcap_{i \in I} M_i$ ناظمية في G

2- المطلوب ان $x \in aZ(G)a^{-1}$ $x \in Z(G)$

وبما ان $x \in aZ(G)a^{-1}$ فإنه يوجد $y \in Z(G)$ محقق.

$$x = aya^{-1}$$

$$x = ya.a^{-1} = y \in Z(G)$$

ومنه : $x \in Z(G) \Leftarrow Z(G)$ ناظمية في G

- لدينا $k \subseteq H$ و k ناظمية في G ونريد اثبات ان k ناظمية في H بما ان k ناظمية في H فإن :

$$aka^{-1} \subseteq k : a \in G$$

وبما ان $H \in G$ فإن $a \in \mathrm{H}$: $aka^{-1} \subseteq k$

أي ان k ناظمية في H

- بما ان $(G:H) = 2$ وبالتالي لدينا مرافقتين مختلفتين فقط $\{H:aH\}$ نميز حالتين: $a \in H$

$$aH = H = Ha$$

$$G = H \cup aH \quad , \quad a \notin H \Rightarrow aH = G\backslash H$$

من جهة أخرى: $G = H \cup Ha$

$$Ha = G\backslash H \ldots .(2)$$

من 1 و2 نجد $Ha = aH$ أي H ناظمية.

تعريف: لتكن G زمرة و A, B مجموعات جزئية غير خالية في G نسمي المجموعة : $A.B = \{a.b$ $a \in A, b \in B\}$

جداء المجموعتين A, B في G

مبرهنة (دون برهان):

لتكن G زمرة و A, B زمرة جزئية في G القضايا الاتية متكافئة:

$A.B$ زمرة جزئية في G .

$$AB =< A \cup B >$$

$$AB = BA$$

مبرهنة (دون برهان):

لتكن G زمرة و A, B زمرة جزئية في G اذا كانت B ناظمية في G عندئذٍ:

1- الجداء $A.B$ زمرة جزئية في G

2- $A.B = B.A$

3- $AB = (A \cup B)$

انتهت المحاضرة

إعداد: وئام النمر، ولاء الأخضر، أبرار الخالد