معك نحو

السخر

Syria Math Team

السنة الثانية

التحليل3

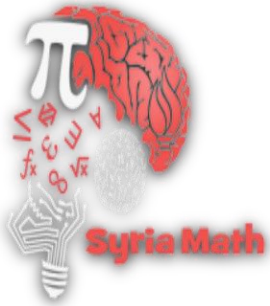
المحاضرة8

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل:

هاتف – واتساب: 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year



◄ دكتور المادة: تحيى قطيش

◄ المحاضرة : الثامنة

◄ عنوان المحاضرة: متسلسلات التوابع

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- متسلسلات التوابع
2- التقارب المنتظم و غير المنتظم لمتسلسلات التوابع
3- الباقي النوني

متسلسلات التوابع

لتكن متتالية التوابع حدودها $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$

نسمي مجموع هذه الحدود اللانهائي بمتسلسلة توابع $f_n(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

ويسمى $f_1(x)$ الحد الأول لهذه المتسلسلة ويسمى $f_n(x)$ الحد النوني (العام) لهذه المتسلسلة.

تعريف: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على مجال I تسمى متتالية التوابع $\{s_n(x)\}$ الآتية متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ على I:

$$s_1(x) = f_1(x)$$
$$, s_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$, s_3(x) + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$$
$$\dots, s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x)$$

Syria Math Team

تعريف التقارب النقطي لمتسلسلة التوابع:

نقول عن متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ المعرفة على I أنها متقاربة نقطياً إذا وفقط إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية $s_n(x)$ متقاربة نقطياً.

نكتب:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$$

عندئذٍ يسمى التابع $s(x)$ بتابع المجموع على I لمتسلسلة التوابع المدروسة

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) \qquad \forall\, x \in I$$

تعريف التقارب بانتظام لمتسلسلة التوابع:

نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ أنها متقاربة بانتظام على I إذا وفقط إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية متقاربة على I .

نتائج:

1) إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I فإنها متقاربة نقطياً على I

2) إذا كانت المتسلسلة متقاربة نقطياً(أو بانتظام) على I فإن حدها العام $f_n(x)$ يسعى للصفر عندما $n \to \infty$

$$f_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}(x) = s(x) - s(x) = 0$$

إن هذه النتيجة تعطي شرطاً لازماً للتقارب ولكنه غير كافٍ، فمثلاً بأخذ متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ التي حدها العام هو $f_n(x) = \frac{1}{n}$ إلا أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة .

3) إذا حذفنا عدد من الحدود من بداية المتسلسلة أو أضفنا عدد منتهي من الحدود إلى بداية لمتسلسلة فإنها لا تتغير من حيث تباعدها أو تقاربها لكن يتغير مجموعها.

4) إذا كان الحد العام لمتسلسلة يسعى إلى تابع غير التابع الصفري فإن المتسلسلة متباعدة.

5) إذا تباعدت متتالية المجاميع الجزئية $\{s_n(x)\}$ لمتسلسلة توابع على مجال فإن متسلسلة التوابع هذه تكون متباعدة.

6) إن جميع القيم x من I التي تكون عندها المتسلسلة متقاربة نسميها مجموعة قيم المتسلسلة المتقاربة أو منطقة التقارب لهذه المتسلسلة.

Syria Math Team

مثال(1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

هي متسلسلة هندسية حدها الأول $a = 1$ وأساسها $r = x$

الشرط اللازم والكافي لتقاربها هو $|x| < 1$ أي $x \in I =]-1,1[$

فمنطقة تقاربها هي المجال $]-1,1[$

نأخذ المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} x^n = x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$

متقاربة من أجل $|x| < 1$

مجموع المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

تذكرة:

$$s_n(x) = a\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

حيث x هو الأساس و a هو الحد الأول.

بالعودة إلى المثال السابق:

$$s_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \Rightarrow s(x) = \frac{1}{1 - x}$$

لأنه عندما تسعى الـ n للانهاية هذا المقدار x^{n+1} يسعى للصفر.

و بشكل مماثل مجموع المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} x^n$ هو $s = \frac{x^2}{1-x}$

المتسلسلتين متقاربتين من أجل $|x| < 1$ لكن مجموعها مختلف وبملاحظة أن هذه المتسلسلة تنتج من المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ بعد حذف حديها الأول والثاني إلا أنها بقيت متقاربة على I وتابع مجموعها تغير عن تابع مجموع المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

مثال2 : ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} nx^2$ على R

Syria Math Team

الحل : نلاحظ أن نهاية الحد العام $\lim_{n\to\infty}(nx^2)=\infty\neq 0$ فهي متباعدة .

دراسة التقارب المنتظم لمتسلسلات التوابع

مبرهنة(1): الشرط اللازم لتقارب متسلسلة توابع $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ من التابع $f(x)$

على المجال I بانتظام هو أن يسعى حدها العام غلى التابع الصفري بشكل منتظم على I

ويمكن صياغة نص المبرهنة وفق الآتي:

إذا كانت متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال I من التابع $f(x)$ فإن الحد العام لهذه المتسلسلة يتقارب من التابع الصفري بانتظام على I

الإثبات: لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ متقاربة بانتظام على I أي متتالية مجاميعها الجزئية $s_n(x)$ متقاربة بانتظام على I ومنه:

أياً كان $\varepsilon>0$ يوجد عدد طبيعي $N_0\neq 0$ بحيث يكون:

$|s_m(x)-s_n(x)|<\varepsilon$ لأجل $m>n>N_0$ ومن أجل جميع قيم x من I

نأخذ $n>N_0+1\Leftarrow n>n-1>N_0$

ومن ثم نأخذ بدل m (n) وبدل n $(n-1)$

$|s_m(x)-s_n(x)|<\varepsilon$ محققة:

نجد أن $|f_n(x)|<\varepsilon$ لأجل كل $\varepsilon>0$ يوجد $N_0\neq 0$

بحيث يكون $|f_n(x)-0|<\varepsilon$ عندما $n>N_0$

أي أن $\{f_n(x)\}$ متتالية توابع متقاربة بانتظام من التابع الصفري $f(x)=0$

تعريف: لتكن $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على مجال I وبفرض ان هذه المتسلسلة متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)+\sum_{k=n+1}^{\infty}f_k(x)$$

$$s(x)=s_n(x)+r_n(x)$$

حيث $r_n(x)$ هو الباقي النوني للمتسلسلة نكتب الباقي النوني للمتسلسلة بالشكل:

Syria Math Team

$$r_n(x) = s(x) - s_n(x)$$

حيث التقارب على المجال I

تعريف: تكون المتسلسلة المتقاربة نقطياً $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال I

إذا وجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N \neq 0$ بحيث يكون $|r_n(x)| < \varepsilon$

$\forall x \in I$ و $n \geq N$

Syria Math Team