معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثالثة

نظرية الاحتمالات

المحاضرة 6

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

◄ دكتور المادة: أحمد الغصين

نظري

عنوان المحاضرة: التوزيعات الاحتمالية

◄ المحاضرة: السادسة

المحتوى العلمي :

الفصل الثاني : التوزيعات الاحتمالية المنقطعة :

1).. توزيع برنولي :

تعريف : ليكن x متحولاً عشوائياً منقطعاً يقال أن x يتبع توزيع برنولي إذا كانت دالته الاحتمالية

$$f(x) = \begin{cases} p & if \quad x = 1 \\ q = 1 - p & if \quad x = 0 \end{cases}$$

نلاحظ من هذا التعريف أن x تأخذ قيمتين الصفر والواحد (0 , 1) معنى ذلك أن هذا التوزيع ينطبق على التجارب الاحتمالية التي لها نتيجتين فقط

$$f(x) = p^x\, q^{1-x} \quad ; \quad x = 0,1$$

دالة التوزيع التراكمية :

$$F(X) = p(X \le x) = \begin{cases} 0 & if \quad x < 0 \\ q & if \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & if \quad x > 1 \end{cases}$$

خصائص هذا التوزيع :

1.. القيمة المتوسطة (التوقع الرياضي) لهذا التابع :

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0,1} x\, f(x) = \sum_{x=0,1} x\, p^x q^{1-x} = p$$

$$\mu = p$$

2.. التباين

$$\sigma_x{}^2 = E(x^2) - \mu^2 \qquad ; \ \alpha = E(x^2)$$

$$= \sum_{x=0,1} x^2 \, f(x) = \sum_{x=0,1} x^2 \, p^x q^{1-x} = p$$

$$\mu = p$$

$$= p - p^2$$

$$= p\,(1-p) \implies \sigma_x{}^2 = pq$$

3.. دالة توليد العزوم للمتحول x :

$$E(e^{xt}) = M_x(t) = \sum_{x=0,1} e^{tx} p^x q^{1-x} = \sum_{x=0,1} (p.e^t)^x . q^{1-x}$$

$$= q + p\,e^t$$

$M_x(t) = E(e^{tx}) = q + pe^t$ دالة توليد العزوم .

4.. دالة توليد الاحتمالات :

$$G(t) = E(t^x) = \sum_{x=0,1} t^x \, p^x q^{1-x} = \sum_{x=0,1} (t\,.p)^x q^{1-x}$$

$$= q + tp \qquad ; \ |t| \le 1$$

هذه يمكن أن نرى :

$$*.. \ M(t) = q + p(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots)$$

$$= 1 + p\,\frac{t}{1!} + p\,\frac{t^2}{2!} + \cdots + p\,\frac{t^r}{r!} + \cdots$$

$G(t) = E(t^x) = q + tp$ دالة توليد الاحتمالات

لحساب العزم من المرتبة r لهذا المتحول نقوم الآن بحساب $G(t)$ على أن نكون $|t| < 1$ ننشر هذه الدالة منشورها (*)

إن العزم من المرتبة r هو : $\mu_r` = \alpha_r = p$

أي أن جميع عزوم هذا التوزيع حول نقطة الأصل متساوية وتساوي p

2).. توزيع ذي الحدين :

تعريف : ليكن x متحولاً عشوائياً منقطعاً يقال أن هذا المتحول يتبع توزيع الحديين بوسيطين $p\,,n$ إذا كانت دالته الاحتمالية لها من الشكل :

$$f(x) = c_x{}^n\, p^x\, q^{n-x}$$

حيث $c_x{}^n = \frac{n!}{x!(\,n-x)!}$ توافيق ، $q = 1-p \;\; ,x = 0\,,1,2,..n$

$$0 \le p \le 1$$

إن هذه الدالة عبارة عن دالة احتمالية لأنها موجبة وسميت بهذا الاسم لأن كل حد من حدود ذي الحديين $(\,p+q)^n$ يناظر احتمال احدى قيم المتحول العشوائي x

$$\sum f(x) = \sum_{x=0}^{n} c_x{}^n\, p^x q^{n-x} = (p+q)^x = 1$$

يستخدم هذا التوزيع بالتجارب التي لها نتيجتين ولكن مكررة n مرة

دالة التوزيع التراكمية :

$$F(X) = p(\,X \le x) = \sum_{n=0}^{s} f(s) = \sum_{s=0} c_s{}^n\, p^s q^{n-s}$$

صفات هذا التوزيع :

1) متوسط (التوقع الرياضي) لهذا التوزيع :

$$\mu = E(x) = \sum x\, f(x) = \sum_{x=0}^{n} x\, C_x{}^n\, p^x q^{n-x} = np$$

$$\mu = E(x) = np$$

ـ استنتاج العلاقة مطلوب :

$$\sum_{x=0}^{n} x\ c_x{}^n\ p^x\ q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x\ \frac{n!}{x!\,(\,n-x)!}\ p^x q^{n-x}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(\,n-x)!}\ p^{x-1}\ q^{n-x}$$

بإجراء تغيير ووضع $y = x-1$, $m = n-1$ نحصل على :

$$\mu = np \sum_{x=1}^{n} x\ \frac{m!}{y!\,(m-y)!}\ p^y\ q^{m-x} = np(q+p)^m = np$$

2) التباين :

$$E\big(x(x-1)\big) = \sum_{x=0}^{n} x\,(x-1)\ \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\ p^x q^{n-x}$$

$$= n\,(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!}\ p^{x-2}\ q^{n-x}$$

بإجراء التغيير $y = x-2$, $m = n-2$

$$E(x^2) - E(x) = n\,(n-1)p^2$$

ومنه : $E(x^2) = n(n-1)p^2 + E(x)$

$$E(x^2) = n\,(n-1)p^2 + np$$

$$\Longrightarrow \quad {\sigma_x}^2 = E(x^2) - \mu^2 = (n(n-1)p^2 + np) - (np)^2 = npq$$

الانحراف المعياري

$$\sigma_x = \sqrt{npq}$$

التباين

$$\sigma_x^2 = npq$$

3 .. دالة توليد العزوم

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\, {C_x}^n\, p^x\, q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} {C_x}^n\, (pe^t)^x\, q^{n-x}$$

$$= (\, q + pe^t\,)^n$$

دالة توزيع العزوم $M_x(t) = (q + pe^t)^n$

من هذه الدالة يمكن أن نحصل على التوقع و التباين .

4.. الدالة المولدة للاحتمالات :

$$G(t) = E(t^x\,) = \sum_{x=0}^{n} t^x\; {C_x}^n\, p^x\, q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} (1+p)^x\, q^{n-x} \; = (q + tp)^n$$

$$G(t) = E(t^x) = (q + tp)^n$$

و هي دالة المولدة للاحتمالات .

من هذه الدلة يمكن الحصول على العزوم المختلفة للمتحول العشوائي و التباين فمثلاً :

$$G`(t) = np(q + pt)^{n-1} \qquad \Longrightarrow \qquad G`(1) = np$$

$$G``(t) = n(n-1)p^2 (q+pt)^{n-2} \qquad \Longrightarrow G``(1) = n(n-1)p^2$$

$$V(x) = G``(1) + G`(1) - [G`(1)]^2$$

$$V(x) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = npq$$

مثال : (وظيفة) قدرت شركة طيران احتمال وصول طائرتها التي تقوم من موسكو متجهة إلى دمشق في ميعادها هو 0.8 ، فإذا قامت 4 طائرات لهذه الشركة من مطار موسكو متجهة إلى دمشق فأوجد :

1.. التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في ميعادها .

2.. متوسط عدد الطائرات التي تصل في ميعادها وكذلك الانحراف المعياري .

3.. التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمية في صورة جدول واستنتج منها :

ـ احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في ميعادها .

ـ احتمال وصول 3 طائرات على الأقل في ميعادها .

ـ احتمال وصول طائرتين على الأكثر في ميعادها .

ـ متوسط التوزيع وكذلك الانحراف المعياري .

ـ التمثيل البياني لهذا التوزيع .

الحل :

1..) بفرض أن x عدد الطائرات التي تصل في ميعادها . إذاً x متغير يتبع توزيع ذي الحدين بمعالم $n = 4$, $p = 0.8$ وبناءً على ذلك فإن دالته الاحتمالية هي :

$$f(x) = C_x^{\ 4}\,(0.8)^x\,(0.2)^{4-x} \qquad ; \quad x = 0,1,2,3,\ldots$$

2..)

$$\mu_x = E(x) = np = 4\,(0.8) = 3.2 \quad \text{طائرة}$$

$$\sigma_x = \sqrt{npq} = \sqrt{4(0.8)(0.2)} = \sqrt{0.64} = 0.8 \quad \text{طائرة}$$

3..) بالتعويض عن قيم x في الدالة الاحتمالية نجد أن :

x	$f(x)$	$F(x)$	$xf(x)$	$x^2f(x)$

0	0.0016	0.0016	0	0
1	0.0256	0.0272	0.0256	0.0256
2	0.1536	0.1808	0.3072	0.6144
3	0.4096	0.5904	1.2288	3.6864
4	0.4096	1.000	1.6384	6.5536

توضيح كيف تم الحساب : $x = 0$

$$f(x) = C_x{}^4 (0.8)^x (0.2)^{4-x}$$

$$f(0) = C_0{}^4 (0.8)^0 (0.2)^{4-0} = \frac{4!}{0!\,(4-0)!} (1).(0.0016)$$

$$F(0) = f(0) = 0.0016$$

$$xf(0) = 0\, f(0) = 0$$

$$x^2 f(0) = 0\, f(0) = 0$$

ـ احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل في ميعادها :

$$p(x \geq 1) = 1 - p(x < 1)$$

$$= 1 - p(x = 0)$$

$$= 1 - 0.0016 = 0.9984$$

ـ احتمال وصول 3 طائرات على الأقل في ميعادها .

$$p(x \geq 3) = p(x = 3) + p(x = 4)$$

$$= 0.4096 + 0.4096 = 0.8192$$

ـ احتمال وصول طائرتين على الأكثر في ميعادها

$$p(x \leq 2) = F(2) = 0.1808$$

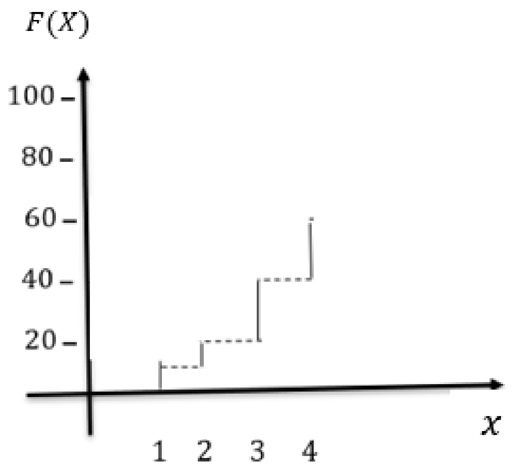
ـ

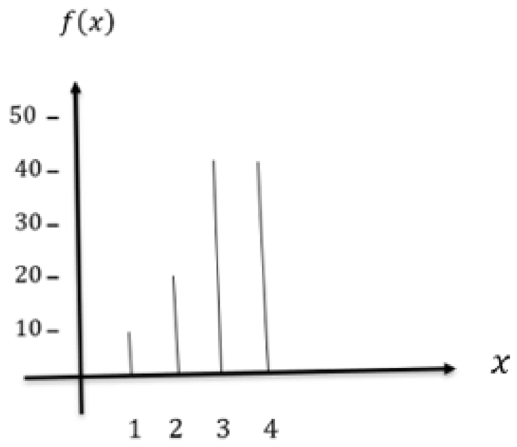
$$\mu_x = \sum x f(x) = 3.2$$

$$\sigma_x^{\ 2} = \sum x^2\, f(x) - \mu_x^{\ 2} = 10.88 - 10.24 = 0.64$$

ومنه $\sigma_x = 0.8$ طائرة .

ـ التمثيل البياني :





3.. توزيع بواسون

يقال عن المتحول العشوائي منقطع إنه يتبع بواسون بوسيط λ إذا كانت دالة الاحتمالية من الشكل :

$$f(x) = \frac{\lambda^x\ e^{-\lambda}}{x!}\ ; x = 0,1,2, \dots . \infty$$

إن هذه الدالة في الواقع هي دالة احتمالية موجبة .

مجموع هذه الدالة :

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x\, e^{-\lambda}}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\, e^{\lambda} = 1$$

لهذا التوزيع جداول خاصة فيه ..

صفات هذا التوزيع :

1..التوقع الرياضي (المتوسط) :

$$\mu = E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x\,\lambda^x}{x!}\; e^{-\lambda}$$

$$= \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x\, e^{-\lambda}}{(x-1)! = \lambda} = \lambda$$

المتوسط $\mu = E(x) = \lambda$

2..التباين والانحراف المعياري :

$$E\big(x(x-1)\big) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{\lambda^x}{x!}\; e^{-\lambda} \;= \lambda^2$$

$$E(x^2) - E(x) = \lambda^2$$

$$E(x^2) = \lambda^2 + E(x)$$

$$E(x^2) = \lambda^2 + \lambda$$

$$\sigma_x{}^2 = E(x^2) - \big(E(x)\big)^2$$

$$= (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2$$

$$\sigma_x{}^2 = \lambda$$

التباين $\sigma_x{}^2 = V(x) = \lambda$

الانحراف $\sigma_x = \sqrt{\lambda}$

3.. دالة توزيع العزوم .

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x \, e^{-\lambda}}{x!}$$

$$M_x(t) = e^{-\lambda} \, . \, e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

دالة توزيع العزوم $M(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$

4.. الدالة المولدة للاحتمالات :

$$G(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

مثال : وظيفة : إذا كان متوسط عدد الزلازل السنوية في إحدى الدول هو 0.6 فأوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الزلازل ثم احسب :

1– الاحتمالات المختلفة .

2– دالة التوزيع التراكمية .

3– احتمال وقوع أكثر من أربعة زلازل في السنة

الحل :

1– نفرض أن x عدد الزلازل السنوية

متوسط عدد الزلازل $\lambda = 0.6$ وحيث الزلازل ظاهرة نادرة فإن x يتبع توزيع بواسون دالته الاحتمالية من الشكل :

$$f(x) = e^{0.6} \frac{(0.6)^x}{x!}$$

$$= \frac{(0.5488)(0.6)^x}{x!} \quad ; x = 0,1,2, \ldots$$

2 – وبناءً على ذلك فإن :

$f(x)$	$F(x)$
$f(0) = 0.5488$	$F(0) = 0.5488$
$f(1) = 0.3293$	$F(1) = 0.8781$
$f(2) = 0.0988$	$F(2) = 0.9769$
$f(3) = 0.0197$	$F(3) = 0.9966$
$f(4) = 0.0030$	$F(4) = 0.9996$

3–

$$p\,(x > 4) = 1 - p(x \leq 4)$$

$$= 1 - F(4)$$
$$= 1 - 0.9996$$

$$= 1 - 0.0004$$

وهذا يعني وقوع أكثر من أربع زلازل هو احتمال صغير جداً ، أي وقوع أكثر من أربع زلازل حادثة نادرة .

مثال: وظيفة : في سلسلة تجارب مستقلة ، احتمال ظهور الحدث A يساوي 0.003 ، إذا تم تكرار هذه التجربة 1000 مرة فما احتمال ظهور الحدث $p(A)$ سبع مرات ؟ ؟

الحل : نفرض أن x عدد مرات ظهور الحدث A ، وإن x يتبع توزيع بواسون بوسيط λ

حيث : $p = 0.003 \ , \ n = 1000$

$$\lambda = np = 3 < 5$$

دالة الاحتمالية :

$$f(x) = e^{-3}\,\frac{(3)^x}{x!} \qquad ; x = 0,1,2,\ldots$$

$$p(x = 7) = f(7) = \frac{e^{-3}\,3^7}{7!} = 0.0216$$