معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

البنى الجبرية1

المحاضرة 6

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

◄ دكتور المادة: فادي أبوحرب

◄ المحاضرة : السادسة ◄ عنوان المحاضرة: مبرهنات

مبرهنة: يوجد في كل مجموعة جزئية وغير خالية $\mathbb{N}$ عنصر أصغر .

البرهان:

(نوجد مجموعة S غير خالية تكون تنتمي الى A فيها اكبر عنصر هو اصغر عنصر في A) (لاتساوي مجموعة الاعداد الطبيعية كلها)

لتكن A مجموعة جزئية وغير خالية من $\mathbb{N}$ اذا كانت $A = \mathbb{N}$ او $0 \in A$ فيتم المطلوب(لانه في هذه الحالة يوجد0 هو عنصر اصغر).

لنفرض الان ان $A \subsetneq \mathbb{N}$ $0 \notin A$ ولنعرف المجموعة S كما يلي:

$$S = \{x : x \in \mathbb{N} \,; k \leq a, \forall a \in A\}$$

إن $S \neq \emptyset$ لان $0 \in S$ كما أن $S \neq \mathbb{N}$ لانه اذا كانت $S = \mathbb{N}$ سيصبح لدينا مايلي:

يوجد $b \in A$ فهذا يعطي ان $b + 1 \in \mathbb{N} = S$

وحسب تعريف المجموعة S يكون $b + 1 \leq b$ وهذا غير ممكن وبالتالي $S \neq \mathbb{N}$

وبالتالي يوجد $k \in S$ بحيث $k + 1 \notin S$ ولنبرهن على ان $k \in A$

ولنفرض جدلاً ان $k \notin A$ ولما كان $k \in S$ فإنه وبحسب التعريف المجموعة S نجد ان $\forall a \in A \,; k \leq a$

ليكن $a_0 \in A$ عندئذٍ $k \leq a_0$ ومنه $\mathbb{N}^* \ni m = a_0 - k \geq 0$

وبالتالي $a_0 = m + k$ (نضيف 1 ونطرح 1)

$$= (m - 1) + (k + 1)$$

$(m - 1)$ اكبر او تساوي الصفر

وبالتالي $a_0 \geq k + 1$ ومنه أياً كان $a \in A$ فإن $k + 1 \leq a$ وحسب تعريف S فإن $k + 1 \in S$

وهذا غير ممكن ومنه $k \in A$ ويحقق $\forall a \in A \,; k \leq a$ وهذا يبين ان k عنصر اصغر في A

نتيجة: (ربط المبرهنات السابقة ببعضها)

كل مجموعة جزئية وغير خالية من N تحقق مبدأ الاستقراء.

البرهان: حسب المرهنة السابقة كل مجموعة جزئية وغير خالية من N تحوي عنصر اصغر. وحسب مبرهنة أخرى، كل عنصر اصغر هو اصغري وبالتالي الشرط الاصغري محقق وحسب المبرهنة 1 فإن مبدأ الاستقراء محقق.

تعريف (المجموعة الجزئية كلياً):

لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً و $a, b \in P$ نقول عن العنصرين a, b انهما متقارنين اذا تحقق الشرط اما $a \leq b$ او $a \geq b$

ونقول عن المجموعة المرتبة جزئياً انها مرتبة كلياً اذا كان كل عنصرين فيها متقارنين.

تعريف:

لتكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً و A مجموعة جزئية وغير خالية من P

نقول عن العنصر $a \in P$ انه حد اعلى للمجموعة A اذا حقق الشرط : $\forall x \in A\,; x \leq a$

نقول عن العنصر $b \in P$ انه حد ادنى للمجموعة A اذا حقق الشرط: $\forall y \in A\,; b \leq y$

مثال:

لتكن $A = \{5,6,7,8,9,10\}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ ماهي الحدود الدنيا والعليا للمجموعة A

الحل:

الحدود العليا: $10,11,12$ الحدود الدنيا: $3,4,5$ ...

انتهت المحاضرة

اعداد: وئام النمر، ولاء الأخضر، ابرار الخالد