

معك نحو

التخرج

# Syria Math Team



السنة الثانية

البنى الجبرية 1

المحاضرة 6

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية - جانب بناء الفيحاء

للتواصل:

هاتف - واتساب: 0991921144

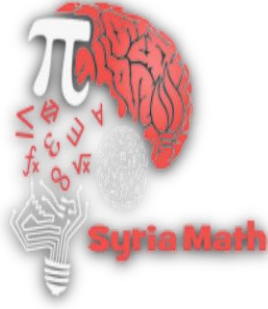
مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2<sup>nd</sup> year



◀ دكتور المادة: فادي أبو حارب

◀ عنوان المحاضرة: مبرهنات

◀ المحاضرة: السادسة



**مبرهنة:** يوجد في كل مجموعة جزئية وغير خالية  $\mathbb{N}$  عنصر أصغر .

**البرهان:**

(نوجد مجموعة  $S$  غير خالية تكون تنتمي الى  $A$  فيها اكبر عنصر هو اصغر عنصر في  $A$ ) (لاتساوي مجموعة الاعداد الطبيعية كلها)

لتكن  $A$  مجموعة جزئية وغير خالية من  $\mathbb{N}$  اذا كانت  $A = \mathbb{N}$  او  $0 \in A$  فيتم المطلوب (لانه في هذه الحالة يوجد  $0$  هو عنصر اصغر).

لنفرض الان ان  $0 \notin A \subsetneq \mathbb{N}$  ولنعرف المجموعة  $S$  كما يلي:

$$S = \{x: x \in \mathbb{N}; k \leq a, \forall a \in A\}$$

إن  $S \neq \emptyset$  لان  $0 \in S$  كما أن  $S \neq \mathbb{N}$  لانه اذا كانت  $S = \mathbb{N}$  سيصبح لدينا مايلي:

يوجد  $b \in A$  فهذا يعطي ان  $b + 1 \in \mathbb{N} = S$

وحسب تعريف المجموعة  $S$  يكون  $b + 1 \leq b$  وهذا غير ممكن وبالتالي  $S \neq \mathbb{N}$

وبالتالي يوجد  $k \in S$  بحيث  $k + 1 \notin S$  ولنبرهن على ان  $k \in A$

ولنفرض جدلاً ان  $k \notin A$  ولما كان  $k \in S$  فإنه وبحسب التعريف المجموعة  $S$  نجد ان  $\forall a \in A; k \leq a$

ليكن  $a_0 \in A$  عندئذٍ  $k \leq a_0$  ومنه  $\mathbb{N}^* \ni m = a_0 - k \geq 0$

وبالتالي  $a_0 = m + k$  (نضيف 1 ونطرح 1)

$$= (m - 1) + (k + 1)$$

$(m - 1)$  اكبر او تساوي الصفر

وبالتالي  $a_0 \geq k + 1$  ومنه أيّاً كان  $a \in A$  فإن  $k + 1 \leq a$  وحسب تعريف  $S$  فإن  $k + 1 \in S$

وهذا غير ممكن ومنه  $k \in A$  ويحقق  $k \leq a; \forall a \in A$  وهذا يبين ان  $k$  عنصر اصغر في  $A$

**نتيجة: (ربط المبرهنات السابقة ببعضها)**

كل مجموعة جزئية وغير خالية من  $N$  تحقق مبدأ الاستقراء.

**البرهان:** حسب المبرهنة السابقة كل مجموعة جزئية وغير خالية من  $N$  تحوي عنصر اصغر. وحسب مبرهنة أخرى، كل عنصر اصغر هو اصغري وبالتالي الشرط الاصغري محقق وحسب المبرهنة 1 فإن مبدأ الاستقراء محقق.

**تعريف ( المجموعة الجزئية كلياً):**

لتكن  $(P, \leq)$  مجموعة مرتبة جزئياً و  $a, b \in P$  نقول عن العنصرين  $a, b$  انهما متقارنين اذا تحقق الشرط اما  $a \geq b$  او  $a \leq b$

ونقول عن المجموعة المرتبة جزئياً انها مرتبة كلياً اذا كان كل عنصرين فيها متقارنين.

**تعريف:**

لتكن  $(P, \leq)$  مجموعة مرتبة جزئياً و  $A$  مجموعة جزئية وغير خالية من  $P$

نقول عن العنصر  $a \in P$  انه حد اعلى للمجموعة  $A$  اذا حقق الشرط:  $\forall x \in A ; x \leq a$

نقول عن العنصر  $b \in P$  انه حد ادنى للمجموعة  $A$  اذا حقق الشرط:  $\forall y \in A ; b \leq y$

**مثال:**

لتكن  $A = \{5,6,7,8,9,10\}$  مجموعة جزئية من  $N$  ماهي الحدود الدنيا والعليا للمجموعة  $A$

**الحل:**

الحدود الدنيا: 3,4,5 ...

الحدود العليا: 10,11,12

**انتهت الحاضرة**

اعداد: وثام النمر، ولاء الأخضر، ابرار الخالد