معك نحو

التخرج

Syria Math Team

نظرية الاحتمالات

السنة الثالثة

المحاضرة 12

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

نظري

◀ دكتور المادة: أحمد الغصين

◀ المحاضرة : الثانية عشر ◀ عنوان المحاضرة: التوزيعات الاحتمالية

سندرس بعض التوزيعات الأخرى :

1- توزيع كوشي .

2- توزيع ستيودنت .

3- توزيع فيسشر أو (ف) .

4- توزيع ريلاي .

5- توزيع مكسويل .

6- توزيع اللوغاريتمي الطبيعي .

7- توزيع ويبل .

8- توزيع باريتو .

9- توزيع كاي X .

لنبدأ :

1- توزيع كوشي :

تعريف : يقال عن متحول عشوائي x أنه يتبع توزيع كوشي إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية هي :

$$f(x) = \frac{1}{\pi\,(1+x^2)} \qquad ; -\infty \le x \le +\infty$$

صفات هذا التوزيع :

هذا التوزيع ليس له قيم متوقعة ولا تباين لأن التكامل المعطى بين هاتين القيمتين غير معروف .

دالة كثافته الاحتمالية :

$$F(X) = p(X \leq x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\tan^{-1} x & ; -\infty \leq x \leq +\infty \\ 0 & ; x \longrightarrow -\infty \\ 1 & ; x \longrightarrow +\infty \end{cases}$$

مثال :

إذا كان x له التوزيع المنتظم على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2} \ , \ \frac{\pi}{2}\right]$ فأثبت أنه يكون للمتغير العشوائي $y = \lambda \tan x$ حيث $\lambda > 0$ توزيع كوشي

المطلوب : حدد التوزيع الاحتمالي لـ y .

((ما هو التوزيع الذي يتبع لـ y (للمتحول)))

الحل :

$$y = \lambda \tan x \quad \Longrightarrow \quad x = arc\tan\frac{y}{\lambda}$$

$$dx = \frac{\frac{1}{\lambda}}{1+\frac{y^2}{\lambda^2}} = \frac{\lambda}{\lambda^2+y^2}$$

$$f_y(y) = f_x\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{dx}{dy}\right| \quad : \quad g(x) = y$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1\ .\ \lambda}{\lambda^2+x^2}$$

إن هذا التوزيع يؤول إلى توزيع كوشي عندما $\lambda = 1$

2- توزيع ستيودنت :

تعريف : يقال عن متحول عشوائي مستمراً x إنه يتبع توزيع ستيودنت إذا كان لـ x دالة كثافة احتمالية من الشكل :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$; -\infty \leq x \leq +\infty$$

فيقال إن لـ x توزيع ستيودنت بعدد من درجات الحرية تساوي n .

- عندما $n = 1$ ينطبق توزيع ستيودنت على توزيع كوشي ، كما نلاحظ أن هذه دالة زوجية أي $f(x) = f(-x)$

صفات هذا التوزيع :

هذا التوزيع ليس له متوقع ولا تباين ..

هذا التوزيع متناظر بالنسبة للنقطة 0 ، وأن العزم الابتدائي من المراتب الفردية كلها معدومة أي : $\alpha_{2r+1} = 0 \; ; r = 1,2,3, \ldots$.

3- توزيع فيسشر أو (ف) :

تعريف : يقال عن متحول عشوائي مستمر x أنه يتبع توزيع فيسشر بدرجات حرية m, n إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل :

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} \cdot x^{\frac{m}{2}-1}$$

$$; \; x \geq 0$$

يرمز لهذا التوزيع بـ $x \sim F(m, n)$

4- توزيع كاي X :

تعريف : يقال عن متحول عشوائي مستمر x أنه يتبع توزيع كاي بمعالم σ و

$n = 1,2, \ldots.$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل التالي :

$$f(x)=\frac{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\sigma^{n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,.x^{n-1}\,exp\left(-\frac{n}{2\sigma^{2}}\,x^{2}\right)\qquad ;x\geq 0$$

عندما $\sigma=1$ نقول أن هذا يتبع توزيع x كاي بدرجة حرية واحدة تساوي n .

5- توزيع ريلاي :

تعريف : يقال عن متحول عشوائي x مستمراً يتبع توزيع ريلاي إذا كانت كثافته الاحتمالية من الشكل :

$$f(x)=\frac{1}{\alpha^{2}}\,.x\,.e^{-\frac{x^{2}}{2\alpha}}\qquad ;x\geq 0$$

مثال : إذا كان العمر x بالسنين لنوع معين من قطع غيار السيارات يتبع توزيع ريلاي التالي :

$$f(x)=\frac{x}{4}.e^{-\frac{x^{2}}{8}}$$

6- توزيع مكسويل :

هو توزيع احتمالي يستخدم في تطبيقات عديدة في الفيزياء والكيمياء ، حيث تعتمد درجة حرارة النظام الفيزيائي على حركة مكوناته من الذرات أو الجزيئات وتتميز الجزيئات بسرعات مختلفة ، وتختلف سرعة اصطدامه بالجزيئات الأخرى ..

تعريف : يقال عن متحول عشوائي مستمر x يتبع توزيع مكسويل بوسيط $\alpha>0$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل :

$$f(x)=\frac{4}{\alpha^{2}\sqrt{x}}\,x^{2}\,e^{-\frac{x^{2}}{\alpha^{2}}}\qquad ;x\geq 0$$

نلاحظ هنا أن توزيع مكسويل ينطبق على توزيع كاي عندما تكون الوسطاء

$$n=3\,,\sigma=\ \alpha.\sqrt{\frac{3}{2}}$$

7- توزيع اللوغاريتمي الطبيعي :

تعريف : يقال عن متحول عشوائي مستمر x أنه يتبع توزيع لوغاريتمي طبيعي بوسطاء μ , σ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل :

$$f(x) = \frac{1}{x\,\sigma\,\sqrt{2\pi}}\, e\,x\,p \left[-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

$$;x > 0 \;\; and \;\; \sigma > 0$$

نلاحظ أن : $\log x \sim N(\mu , \sigma^2)$

8- توزيع ويبل :

تعريف : يقال عن متحول عشوائي مستمر x أنه يتبع توزيع ويبل بوسطاء α , λ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل :

$$f(x) = \lambda\,\alpha\,x^{\alpha-1}\; e^{-\lambda x^{\alpha}}$$

$$;x \geq 0 \;\; and \;\; \lambda , \alpha > 0$$

نلاحظ أن هذا التوزيع ينطبق على التوزيع الأسي عندما $\alpha = 1$ وهو حالة خاصة من هذا التوزيع .

9- توزيع باريتو :

تعريف : يقال عن متحول عشوائي مستمر x أنه يتبع توزيع باريتو إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل :

$$f(x) = \frac{a\,.\,b^{a}}{x^{a+1}} \qquad ;x \geq b \;\; and\; a, b \geq 0$$

دالة التوزيع التراكمية :

$$F(X) = p(\,X \leq x) = \int_{b}^{x} \frac{a.\,b^{a}}{s^{a+1}}\,ds \;= 1 - b^{a}\,.\,x^{-a}$$

التوقع : $\mu = E(X) = \frac{a\,.b}{a-1}$

$$E(X^2) = \frac{a.\,b^2}{a-2}$$

$$\sigma_x{}^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{a.b^2}{a-2} - \left(\frac{a.b}{a-1}\right)^2$$

التباين :

$$\sigma_x{}^2 = \frac{a.b^2}{(a-2)(a-1)^2}$$

العزم من المرتبة r :

$$\alpha_r = \frac{a\,.\,b^r}{a-r}$$

من هذا العزم يمكن أن نوجد جميع العزوم ..

انتهت المحاضرة الثانية عشرة ..