◄ دكتورة المادة: هدى شماط

◄ المحاضرة: التاسعة عشرة

عنوان المحاضرة: الحركة المحصلة لنقطة مادية (تركيب الحركات)

الدراسة التحليلية للحركة المحصلة

دائماً في الدراسة التحليلية نبدأ باختيار جملتي محاور ثابتة ومتماسكة ، ولتكن $oxyz$ جملة محاور احداثية متماسكة مع S ، ولتكن $o_1x_1y_1z_1$ جملة محاور احداثية ثابتة ، عندئذٍ :
يعطى شعاع الموضع لنقطة ما ولتكن M من الجسم الصلب في الجملة الثابتة بالعلاقة :

$$\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + \overrightarrow{oM}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{o_1M} = (x_0, y_0, z_0) + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \dots\dots \$$$

$$\overrightarrow{o_1M} = (x_0, y_0, z_0) + x(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + y(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) + z(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$$

مركبات النقطة M $\begin{cases} x_1 = x_0 + x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3 \\ y_1 = y_0 + x\beta_1 + y\beta_2 + z\beta_3 \\ z_1 = z_0 + x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3 \end{cases}$

حيث $\vec{k} = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, $\vec{\jmath} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, $\vec{\imath} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ مقادير تابعة للزمن تتعين بتابعية زوايا أولر ، (x, y, z) هي الاحداثيات النسبية للنقطة M و هي مقادير تابعة للزمن ايضاً
(x_0, y_0, z_0) احداثيات النقطة o مبدأ الجملة المتحركة و هي أيضاً متغيرة بالنسبة للزمن ، وبالتالي تتعين احداثيات النقطة M المطلقة (x_1, y_1, z_1) بتابعية تسع وسطاء تابعة كلها للزمن .
و (x_0, y_0, z_0) جزء في جرية و $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ مع (x_0, y_0, z_0) جرية و (x', y', z') سرعة نسبية و (x_1', y_1', z_1') سرعة مطلقة
لتعين السرعة المطلقة نشتق العلاقة \$ فنجد :

$$\vec{V_a}(M) = \frac{d\overrightarrow{o_1M}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt} + \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + x\frac{d\vec{\imath}}{dt} + y\frac{d\vec{\jmath}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\Longrightarrow \vec{V_a}(M) = \frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt} + x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k} + x\,\vec{\imath'} + y\vec{\jmath'} + z\vec{k'} \dots (\$\$)$$

علاقات بواصون $\quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k} \quad , \quad \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath} \quad , \quad \frac{d\vec{\imath}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath}$

$$\Rightarrow \vec{V_a}(M)=\frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt}+x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}+x(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath})+y(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath})+z(\vec{\omega}\wedge\vec{k})$$

$$\Rightarrow \vec{V_a}(M)=\frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt}+x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}+\vec{\omega}\wedge(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k})$$

$$\Rightarrow \vec{V_a}(M)=\frac{d\overrightarrow{o_1o}}{dt}+x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oM}$$

حيث $\vec{V_e}(M)=\vec{V}(o)+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{oM}$ و $\vec{V_r}(M)=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{V_a}(M)=\vec{V_r}(M)+\vec{V_e}(M)$$

لتعيين التسارع نشتق السرعة من العلاقة ($\$\$$) فنجد :

$$\vec{\Gamma_a}(M)=\frac{d2\overrightarrow{o_1o}}{dt^2}+x''\vec{\imath}+y''\vec{\jmath}+z''\vec{k}+x'\vec{\imath}'+y'\vec{\jmath}'+z'\vec{k}'+x\,\vec{\imath}''+y\,\vec{\jmath}''+z\,\vec{k}''+x'\vec{\imath}'+y'\vec{\jmath}'+z'\vec{k}'$$

$$\vec{\Gamma_a}(M)=\underbrace{x''\vec{\imath}+y''\vec{\jmath}+z''\vec{k}}_{\vec{\Gamma_r}(M)}+\underbrace{2[x'\vec{\imath}'+y'\vec{\jmath}'+z'\vec{k}']}_{\vec{\Gamma_c}(M)}+\underbrace{\vec{\Gamma}(o)+x\,\vec{\imath}''+y\,\vec{\jmath}''+z\,\vec{k}''}_{\vec{\Gamma_e}(M)}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma_a}(M)=\vec{\Gamma_r}(M)+\vec{\Gamma_e}(M)+\vec{\Gamma_c}(M)$$

" دساتير بور "

في بعض المسائل يكون ايجاد شعاع التسارع المطلق في الجملة المتماسكة اسهل من ايجاده في الجملة الثابتة لذلك نحتاج لطريقة لإيجاد هذا الشعاع في الجملة المتماسكة و هذه الطريقة هي باستخدام دساتير بور ، نعلم أن التسارع المطلق هو المشتق الزمني للسرعة المطلقة $\vec{V_a}(M)$ في الفراغ الثابت ، وبالتالي :

$$\vec{\Gamma_a}(M)=\left.\frac{d\vec{V_a}(M)}{dt}\right|_F=\left.\frac{d\vec{V_a}(M)}{dt}\right|_M+\vec{\omega}\wedge\vec{V_a}(M)$$

حيث :

$$\vec{V_a}(V_x,V_y,V_z)\quad,\quad \vec{\omega}(p,q,r)\quad,\quad \vec{\Gamma_a}(M)=(\Gamma_x,\Gamma_y,\Gamma_z)$$

حيث
$$\vec{\omega}\wedge\vec{V_a}(M)=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\ p&q&r\\ V_x&V_y&V_z\end{vmatrix}$$

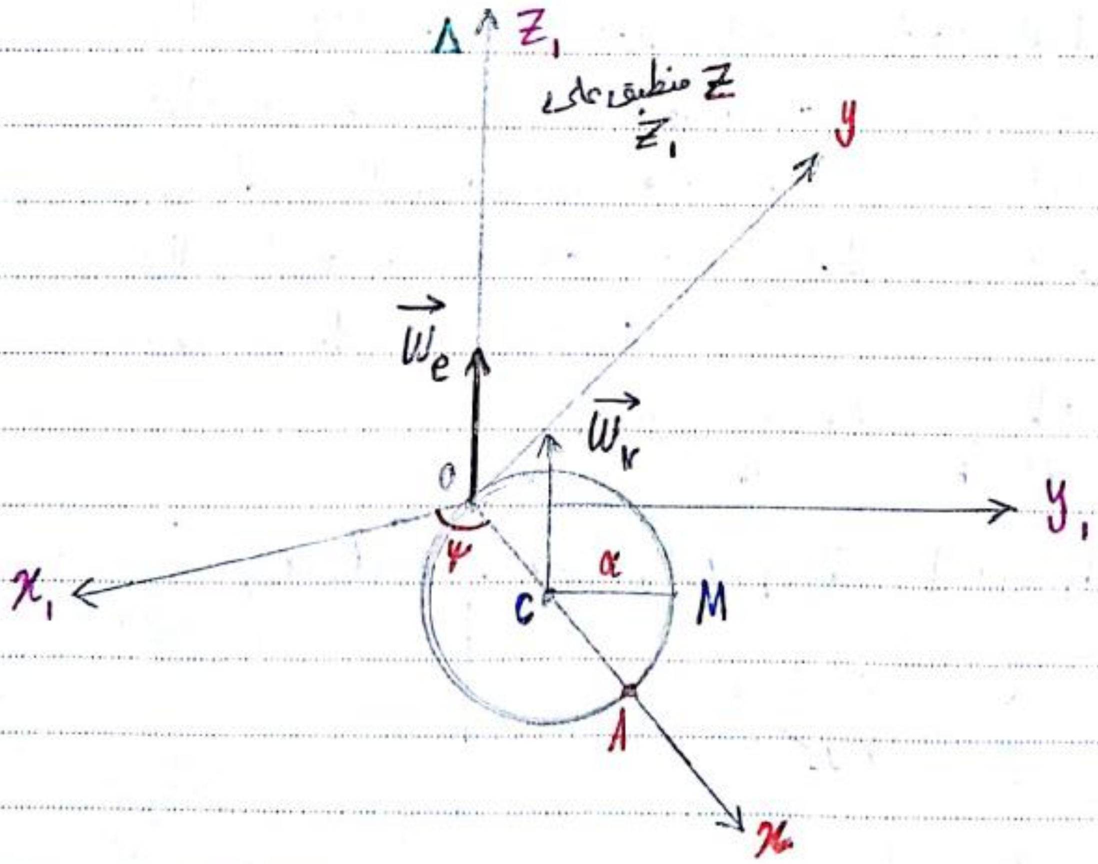
$$\Rightarrow \vec{\omega}\wedge\vec{V_a}(M)=(qV_z-rV_y)\vec{\imath}+(rV_x-pV_z)\vec{\jmath}+(pV_y-rV_x)\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\Gamma_a}(\mathrm{M}) = \begin{cases} \dfrac{dV_x}{dt} + qV_z - rV_y \\ \dfrac{dV_y}{dt} + rV_x - pV_z \\ \dfrac{dV_z}{dt} + pV_y - qV_x \end{cases}$$

وهذه الدساتير الثلاث هي دساتير بور التي تحدد التسارع المطلق على الجملة المتماسكة .

مسألة: يدور قرصاً دائري نصف قطره a بسرعة زاوية ثابتة ω حول محور يمر من نقطة O تقع على محيط القرص.

تنزلق نقطة M بدءاً من النقطة A المقابلة قطرياً لـ O على محيط القرص بسرعة فسطحية قيمتها u ، عيّن السرعة والتسارع المطلقين لـ M في الحالة التي يكون فيها محور الدوران يعامد مستوي القرص.



$Ox_1y_1z_1$ ثابتة

بحيث Δ ينطبق على Oz_1

$Oxyz$ جملة محاور متماسكة مع القرص بحيث z ينطبق على Δ.

وبحيث يقع المحور Ox على OA.

إن حركة M دائرية بالنسبة للقرص حول مركز القرص C (نسبية).

أما حركة M دورانية مع القرص حول Δ (جرية).

$$(\omega_e \parallel Oz_1 \ , \ \omega_r \parallel Oz_1)$$

منطبق في النقطة C مركز القرص.

نحلها على تركيب الحركات.

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

$$\vec{V}_r = \vec{\omega}_r \wedge \vec{CM}$$

M تتحرك بسرعة منتظمة فإن:

$$|\vec{V}_r(M)| = |\vec{\omega}_r|\,|\vec{CM}|\,\sin(\vec{\omega}_r \cdot \vec{CM})$$

متعامدين فتساوي الواحد.

$$u = \omega_r \cdot a$$

$$\Rightarrow \omega_r = \frac{u}{a}$$

$$\varphi' = \frac{u}{a} \Rightarrow \varphi = \frac{u}{a}t + \varphi$$

نفرض $\varphi = 0 \ , \ t = 0$

$$\Rightarrow \varphi_0 = 0$$

$$\varphi = \frac{u}{a}t$$

$$\vec{V_r} = \vec{\omega} \wedge \vec{CM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{u}{a} \\ a\cos\varphi & a\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V_r} = -u\sin\varphi\,\vec{i} + u\cos\varphi\,\vec{j}$$
$$= -u\sin\frac{u}{a}t\,\vec{i} + u\cos\frac{u}{a}t\,\vec{j}$$

$$\vec{V_e}(M) = \vec{W_e} \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{OM}$$

$$\vec{OM} = \vec{OC} + a\cos\varphi\,\vec{i} + a\sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\vec{V_e}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & W_e \\ a + a\cos\varphi & a\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -W_e a\sin\varphi\,\vec{i} + W_e(a + a\cos\varphi)\,\vec{j}$$

$$\vec{V_a}(M) = (-u - Wa)\sin\frac{u}{a}t\,\vec{i} + \left[Wa\left(1 + \cos\frac{u}{a}t\right) + u\cos\frac{u}{a}t\right]\vec{j}$$

Date

ملاحظة: إذا طلبت معادلات الحركة تكون في الجملة الثابتة لأن الدوران حول محور ثابت

$$\omega_e = \omega = \psi'$$

$$\psi = \omega t + \psi_0$$

$$\psi = \omega t = 0$$

$$\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi = \omega t$$

لحساب Γ_a نطبق دساتير بور لأن الجملة متماسكة.

$$\vec{\Gamma}_a(M) = \frac{d\vec{V}_a}{dt}\Big|_M + \vec{\omega}\wedge\vec{V}_a$$

$$\frac{d\vec{V}_a}{dt}\Big|_M = \overbrace{\frac{u}{a}(-u-\omega a)\cos\frac{u}{a}t}^{V_x}\,\vec{i} + \Big[\underbrace{\omega a\left(-\frac{u}{a}\sin\frac{u}{a}t\right)-\frac{u^2}{a}\sin\frac{u}{a}t}_{V_y}\Big]\vec{j}$$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{V}_a = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ V_x & V_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{V}_a = -V_y\,\omega\,\vec{i} + V_x\,\omega\,\vec{j}$$

لو كان محور الدوران ليس عمودي على مستوي القرص أي يقع في مستوي القرص تبقى الحركة النسبية كما هي.

أما الحركة الجرية: بما أن حركة M مع القرص فنختار إما x أو y ونختار ω_e محمول على y.