معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

البنى الجبرية1

المحاضرة 17

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

25-11-2019

نظري

◄ دكتور المادة: فادي أبوحرب

◄المحاضرة : السابعة عشر ◄ عنوان المحاضرة: المرافقات

مبرهنة:

لتكن G زمرة و A,B زمرتين جزئيتين في G القضايا التالية الصحيحة:

1- اذا كانت كل من الزمرتين A,B ناظمية في G فإن الجداء $A.B$ هو زمرة جزئية ناظمية في G

2- اذا كانت كل من الزمرتين A,B تبديلية ناظمية في G وكان $A \cap B =< e >$ فإن الجداء $A.B$ هو زمرة تبديلية.

البرهان:

حسب المبرهنة السابقة فإن $A.B$ هو زمرة جزئية في G لنثبت الان ان $A.B$ ناظمية في G يكفي لاثبات ذلك ان نثبت ان : $xA.B.x^{-1} \subseteq A.B \, , \forall x \in G$

ليكن $z \in xA.B.x^{-1}$ ومنه يوجد $a \in A, b \in B$ بحيث $z = xa.b.x^{-1}$

$$= xae.b.x^{-1} = \underbrace{xa.x^{-1}}_{A} . \underbrace{x.b.x^{-1}}_{B} \in A.B$$

لان A ناظمية ومنه $z \in A.B$ وبالتالي $x.A.B.x^{-1} \subseteq A.B$

وبالتالي $A.B$ ناظمية في G

- نريد اثبات ان $A.B$ تبديلية, أي لنثبت ان $\forall x,y \in A.B \, ; x.y = y.x$

$x \in A.B$ عندئذٍ يوجد $a \in A, b \in B$ بحيث $x = a.b$

$y \in A.B$ عندئذٍ يوجد $a_1 \in A \, , b_1 \in B$ بحيث $y = a_1.b_1$

$$x.y = (ab).(a_1.b_1) = a.a_1.b.b_1 = a_1.a.b_1.b = a_1.b_1.a.b = y.x$$

$$A.B = B.A$$

برهن $ba_1 = a_1b$ لنثبت ان $a.b = b.a \, , \forall a \in A \, , b \in B$

$$(a.b)(a^{-1}.b^{-1}) = \begin{cases} (a.b.a^{-1})b^{-1} \in B \\ a(b.a^{-1},b^{-1}) \in A \end{cases}$$

$$(a.b)(a^{-1}.b^{-1}) \in A \cap B =< e >$$

$$(a.b)(a^{-1}.b^{-1}) = e$$

$$a.b.a^{-1} = b$$

$$a.b = b.a$$

تذكرة بنظرية المجموعات:

1- علاقة التكافؤ
2- لاجل $a \in P$ هناك صف تكافؤ العنصر a وهو $\bar{a} = \{x : x \in P \, ; a\mathcal{P}x\}$
3- مجموعة صفوف تكافؤ العلاقة $\mathcal{P}$ تشكل مجموعة تدعى مجموعة الخارج. $\frac{P}{\mathcal{P}} = \{\, \bar{a} \, ; a \in P\}$
4- هناك علاقة بين علاقة التكافؤ و التجزئة لمجموعة.

نظرية الزمر:

في الزمرة الجزئية الناظمية فإن: $aH = Ha \, ; \; \forall a \in G$

- هناك مبرهنة تقول ان مجموعة المرافقات تشكل تجزئة للزمرة G .
- هذه التجزئة تعرف لنا علاقة تكافؤ $\mathcal{P}$ على G
  هذه العلاقة معرفة بالشكل : $\forall a, b \in G \, ; a\mathcal{P}b \Leftrightarrow aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$
- صفوف تكافؤ هذه العلاقة هي المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية الناظمية H في G
- نرمز لمجموعة صفوف تكافؤ هذه العلاقة بالرمز G/H

مبرهنة هولدر (1889): (بدون برهان)

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G لنعرف على المجموعة $G/H = \{aH \, ; a \in G\}$

العملية (.) بالشكل $(aH).(bH) = (ab)H$ وبذلك اياً كان $aH, bH \in G/H$

عندئذٍ المجموعة G/H تشكل زمرة بالنسبة للعملية (.)

تعريف: نسمي الزمرة المعرفة في المبرهنة السابقة بزمرة الخارج للزمرة G وفق H

مثال:

في زمرة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ نعلم ان:

$$4\mathbb{Z} = \{0, \mp 4 \, , \mp 8, \mp 12, ..\}$$

زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$, وبما ان $\mathbb{Z}$ تبديلية فإن $4\mathbb{Z}$ ناظمية في $\mathbb{Z}$

- ان المرافقات اليسارية ل $4\mathbb{Z}$ في $\mathbb{Z}$ هي : $0 + 4\mathbb{Z} = \{0, \mp 4, \mp 8, \dots\} = 4 + 4\mathbb{Z}$

$$1 + 4\mathbb{Z} = \{1, +5, +9 \dots, -3, -7\} = 5 + 4\mathbb{Z}$$

$$2 + 4\mathbb{Z} = \{2,6,10, \dots, -2, -6, -10\} = 6 + 4\mathbb{Z}$$

$$3 + 4\mathbb{Z} = \{3,7,11 \dots, -1, -5, \dots\} = 7 + 4\mathbb{Z}$$

ومنه المرافقات اليسارية المختلفة ل $4\mathbb{Z}$ في $\mathbb{Z}$ هي: $\{4\mathbb{Z}, 1 + 4\mathbb{Z}, 2 + 4\mathbb{Z}, 3 + 4\mathbb{Z}\}$

وبالتالي زمرة الخارج هي $G/H = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{4\mathbb{Z}, 1 + 4\mathbb{Z}, 2 + 4\mathbb{Z}, 3 + 4\mathbb{Z}\}$$

.	$4\mathbb{Z}$	$1 + 4\mathbb{Z}$	$2 + 4\mathbb{Z}$	$3 + 4\mathbb{Z}$
$4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z}$	$1 + 4\mathbb{Z}$	$2 + 4\mathbb{Z}$	$3 + 4\mathbb{Z}$
$1 + 4\mathbb{Z}$	$1 + 4\mathbb{Z}$	$2 + 4\mathbb{Z}$	$3 + 4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z}$
$2 + 4\mathbb{Z}$	$2 + 4\mathbb{Z}$	$3 + 4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z}$	$1 + 4\mathbb{Z}$
$3 + 4\mathbb{Z}$	$4\mathbb{Z} + 3$	$4\mathbb{Z}$	$1 + 4\mathbb{Z}$	$2 + 4\mathbb{Z}$

تمرين للطالب:

اوجد زمرة الخارج للزمرة $\mathbb{Z}18$ حسب الزمرة الجزئية الناظمية

$$H =< 6 > = \{0,6,12\}$$

مبرهنة:

لتكن G زمرة اذا كانت الزمرة $G/Z(G)$ دوارة عندئذٍ تكون الزمرة G تبديلية

انتهت المحاضرة

إعداد: وئام النمر، ولاء الأخضر، أبرار الخالد