معك نحو

التخرج

Syria Math Team

نظرية الاحتمالات

السنة الثالثة

المحاضرة 15 و16

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

نظري

◄ دكتور المادة: أحمد الغصين

◄ المحاضرة: الخامسة عشر و السادسة عشر

◄ عنوان المحاضرة: الأشعة العشوائية

الصفات المميزة للشعاع (X,Y) :

1- التوقع الرياضي : $\mu = E(X,Y)$

$$E(X,.) = \mu_x \qquad , E(.\ ,Y) = \mu_y$$

تعريف : إذا كان (x,y) متحول عشوائي ثنائياً منقطعاً وكانت دالته الاحتمالية المشتركة $f(x,y)$

فإن التوقع الرياضي للمتحول X :

$$\mu = E(X,\ .) = \sum_{j=i} x\ f(x,.)$$

وذات الطريقة بالنسبة لـ Y :

$$\mu = E(\ .\ ,Y) = \sum_{j} y\,.\,f(\ .\ ,Y)$$

تعريف : إذا كان (X,Y) متحول عشوائي منقطع و دالته الاحتمالية $f(x,y)$ وكانت $g(X,Y) = 0$ دالة .

فإن القيمة المتوقعة لهذه الدالة في حال كانت المتحولات العشوائية مستمرة :

$$E\big(g(x,y)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y) dx\, dy$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y) dx\, dy$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dy$$

2- إذا كانت $g(x,y) = y$ بنفس الطريقة :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y)dx$$

3-

$$g(x,y) = (x-\mu_x)^2 \qquad *$$

$$g(x,y) = \left(x-\mu_y\right)^2 \qquad **$$

$$E(x-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2\, f(x,y)dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2\, dx \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}_{f_x}$$

$$= {\sigma_x}^2 = V(X)$$

وبنفس الطريقة :

$$E(y-\mu_x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu)^2\, dy \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}_{f_y}$$

$$= {\sigma_y}^2 = V(Y)$$

العزوم :

نوجد للشعاع العشوائي عزوم في حالة وجود التوقعات الرياضية له ، كما يوجد لهذه العزوم العادية ، عزم مشترك من المرتبة $(r+s)$ ، وذلك لأن المتحولان غير مستقلة .

نرمز للعزم المشترك بالرمز α_{rs} ، بحيث :

$$\alpha_{rs} = E(X^r, Y^s) = \int\int X^r Y^s f(x,y)dx\,dy$$

$$\alpha_{1\ 1} = E(X,Y) = \int\int XY\, f(x,y)dx\,dy$$

$$\alpha_{rs} = \begin{cases} \sum_{i,j} (X_i - \mu_x)^r\,(Y_i - \mu_y)^s f(x,y) & \text{منقطع} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (X-\mu_x)^r\,(Y-\mu_y)^s f(x,y)dx\,dy & \text{مستمر} \end{cases}$$

إذا كانت :

$$\mu_{0\ 2} = V(y) \quad ,\mu_{2\ 0} = V(X)$$

$$\sigma_{x+y}{}^2 = E\big(X+Y-E(X)-E(Y)\big)^2$$

$$= E\big(\big(X-E(X)\big) + (Y-E(Y)\,)^2$$

$$= V(X) + V(Y) + 2\mu_{1\ 1}$$

التغايير :

يرمز له بالرمز $cor(x,y)$

$$cor(x,y) = E\Big(\,(x-\mu_x)(y-\mu_y)\Big)$$

$$cor\,(x,y) = E(x,y) - \mu_x\,\mu_y$$

$$cor(\,\alpha x\,,\beta y) = \alpha\beta\,cor\,(x,y)$$

من هذه العبارة يمكن استنتاج التوقع الرياضي : للجداء $X.Y$

معامل الارتباط :

للمتحولين (x,y) يرمز له بالرمز $\rho(x,y)$

$$\rho = p(x,y) = \frac{cor(x,y)}{\sigma_x \, \sigma_y}$$

يقيس درجة العلاقة بين المتحولين العشوائيين .

إذا كان $X\ ,Y$ مستقلان ، وإن معامل الارتباط $\rho = 0$ ولكن إذا كان $p = 0$ ليس بالضرورة أن يكونا مستقلان .

مبرهنة :

برهن أن معامل الارتباط ρ محصور بين 1 و -1

البرهان :

ليكن $u\ ,v$ متحولات عشوائية اختيارية و t متحول حقيقي ثم نحسب القيمة المتوقعة للمقدار $E\ (tu - v)^2$

$$E(tu - v\ )^2 = t^2\ .E(u)^2 - 2t\ E(\ u.v) + E(v^2) \geq 0$$

$$[\ E(u.v)]^2$$

انتهت المحاضرة الخامسة عشرة ..

الدالة المولدة للعزوم للأشعة العشوائية بمركبتين :

إن الدالة المولدة للعزم للشعاع العشوائي (X,Y) أو للمتحولات الثنائية والتي يرمز لها بالرمز $M(t,u)$ تعرف بالشكل :

$$M(t,u) = E\ (\ e^{Xt+Yu}\ )$$

ـ إذا كانت الأشعة الثنائية منقطعة فإن :

$$M(t,u) = E(\ e^{Xt+Yu}\ ) = \sum\sum e^{tX+uY}\ f(x,y)$$

ـ بينما لو كانت الأشعة العشوائية الثنائية مستمرة فإن :

$$M(t,u) = E(\ e^{Xt+Yu}\ ) = \int\int\ e^{Xt+Yu}\ f(x,y)dx\ dy$$

وهنا نلاحظ أن :

$$M_Y(u) = E(e^{Yt}) = M(o,u)$$

$$M_X(t) = E(e^{Xt}) = M(t,o)$$

يلزم ويكفي ليكون $X\ ,Y$ مستقلان أن يكون : $M(t,u) = M(t)M(u)$

وإذا كان العزم المختلط موجود وكانت دالة توليد العزوم قابلة للتفاضل فإن :

$$\mu_{NS} = \left.\frac{\partial^{r+s}M(t,u)}{\partial t^r\ \partial u^s}\right|_{t=u=0}$$

مثال :

ليكن (X,Y) شعاع عشوائي له الكثافة الاحتمالية المشتركة :

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & ;0<x<y<\infty \\ 0 & ;\ \text{غير ذلك} \end{cases}$$

المطلوب :

1– عين الدالة المولدة للعزم للشعاع (X,Y)

2– أوجد $M_Y(t)\ ,\ M_X(t)$

الحل :

$$M_{XY}(t_1,t_2)=E(e^{t_1X+t_2Y})$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x+t_2y}\,dx\,dy$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{y} e^{t_1x+t_2y}\,e^{-y}\ dxdy$$

$$=\int_{0}^{\infty} e^{-y+t_2y}\int_{0}^{y} e^{t_1x}\ dx\,dy$$

$$=\int_{0}^{\infty} e^{-y+t_2y}\left[\frac{1}{t_1}\,e^{t_1x}\right]_0^y dy$$

$$=\int_{0}^{\infty} e^{-y+t_2y}\ \left(\frac{1}{t_1}e^{t_1y}-\frac{1}{t_1}\right)dy$$

$$=\frac{1}{t_1}\int_{0}^{\infty}\left[\,e^{(t_1+t_2-1)y}-e^{(t_2-1)y}\ \right]dy$$

$$= \frac{1}{t_1}\left[\frac{1}{t_1+t_2-1}\ e^{(t_1+t_2-1)y} - \frac{1}{t_2-1}\ e^{(t_2-1)y}\right]_0^{\infty}$$

ليكون التوقع موجوداً يجب أن يتحقق :

$$t_2 - 1 < 0 \quad , \qquad t_1 + t_2 - 1 < 0$$

$$\Rightarrow M_{X,Y}\,(t_1,t_2) = \frac{1}{t_1}\left(\frac{-1}{t_1+t_2-1} + \frac{1}{t_2-1}\right)$$

$$= \frac{1}{(t_1+t_2-1)(t_2-1)}$$

إذاً :

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = \frac{1}{(t_1+t_2-1)(t_2-1)} \qquad ; \begin{matrix} t_1+t_2<1 \\ t_2<1 \end{matrix}$$

عندما : $t_1 < 1$, $t_2 = 0$ نجد : $M_X(t_1) = M_{X,Y}(t,0) = \frac{1}{(1-t_1)}$

وعندما : $t_1 = 0$ نجد أن :

$$M_Y(t_2) = M_{X,Y}(0,t_2) = \frac{1}{(1-t_2)^2} \quad ; t_2 < 1$$

المتوسط المشروط أو التوقع المشروط :

رأينا أن دالة الكثافة الاحتمالية للمتحول Y بشرط : $X = x$

هي : $f(Y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

وبذلك يعرف التوقع المشروط أو المتوسط للمتحول Y بشرط $X = x$ بالشكل :

$$E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y\, f(Y|x)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Yf(x,y)}{f_X(x)}\, dy$$

ويتضح هنا أن النتيجة هي دالة في المتحول x فقط .

مبرهنة :

إذا كان المتوسط المشروط $E\ (X\mid Y=y)$ دالة خطية في Y :

$$E(X|Y) = \mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \mu_Y)$$

ويدعى خط انحدار X على Y

البرهان :

لنفرض أن $\varphi(Y) = aY + b$ حيث $a\ ,b$ مقادير ثابتة يطلب تعيينها

$$E(X|Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xf(x,y)}{f_y(y)}\, dy \quad = aY + b$$

ومنه نجد :

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dx = (aY+b)f_y(Y) \quad \dots(I)$$

نكامل طرفي المعادلة (I) بالنسبة لـ Y فنحصل على :

$$\mu_X = a\mu_Y + b \quad \dots(II)$$

إذا ضربنا طرفي المعادلة (I) بـ Y وقمنا بتكامل طرفيها بالنسبة لـ Y أيضا فإننا نحصل على :

$$E\ (XY) = a\ E(Y^2) + b\mu_y$$

ومن تعريف تغايير المتحولين $X\ ,Y$ نجد أن :

$$cor(X,Y) = E\ (XY) - \mu_x\mu_y$$

$$\Longrightarrow \rho\sigma_x\sigma_y + \mu_x + \mu_y = E(X.Y)$$

إذا :

$$\rho\sigma_x\sigma_y + \mu_x\mu_y = a\left(\sigma_y^2 + \mu_y^2\right) + b\mu_y \qquad \dots III$$

بحل جملة المعادلات II و III بالنسبة لـ a, b نحصل على :

$$b = \mu_x - \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\mu_y \quad , \qquad a = \rho - \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

وبتعويض الثوابت بما يساويها يتم المطلوب ..

مثال 2 :

إذا كانت دالة كثافة المشتركة للمتحولين (X, Y) هي :

$$f(x,y) = \frac{\lambda^y\, c^{-2\lambda}}{x!\,(y-x)!} \quad ; \quad \begin{array}{l} x = 0,1,2,\dots y \\ y = 0,1,2,\dots.. \end{array}$$

λ مقدار ثابت ..

$$f(Y|X) \quad , f(X|Y)$$

$$p(\,0 \le x \le 1\,, 0 \le y \le 1) \quad p(\,X = Y)$$

معامل الارتباط $p(X, Y)$

التغايير $cor(X, Y)$

وذلك نوجد الدوال الهاشمية لـ x :

$$f_x(X) = \sum_{y=x}^{\infty} \frac{\lambda\, e^{-2\lambda}}{x!\,(y-x)!}$$

$$= \frac{e^{-2\lambda}}{x!}\sum_{y=x}^{\infty}\frac{\lambda^y}{(y-x)!}$$

$$= \frac{e^{-2\lambda}}{x!} \lambda^x \sum_{y=x}^{\infty} \frac{\lambda^{y-x}}{(y-x)!}$$

$$= \frac{e^{-2\lambda} \lambda^x e^{\lambda}}{x!}$$

$$f_x(X) = \frac{e^{-\lambda} \ \lambda^x}{x!} \qquad ; x = 0,1,2, \dots$$

أي أن دالة الهامشية تتبع توزيع بواسون بوسيط λ

$$f_y(Y) = \sum_{x=0}^{y} \frac{\lambda^y \ e^{-2\lambda}}{x! \, (y-x)!}$$

$$= \frac{e^{-2\lambda} \lambda^y}{Y!} \sum_{x=0}^{y} \frac{X!}{X! \, (y-x)!}$$

$$= \frac{e^{-2\lambda} \lambda^y}{y!} \sum_{x=0}^{y} \frac{y!}{x! \, (y-x)!}$$

حيث :

$$= \frac{e^{-2\lambda} \lambda^y}{y!} \binom{y}{x} \ ; \ \sum \frac{y!}{x! \, (y-x)!} = \binom{y}{x}$$

$$\sum_{x=0}^{y} \binom{y}{x} = \binom{y}{0} + \binom{y}{1} + \binom{y}{2} + \dots +$$

نضرب بـ 1

$$(1+1)^y = 2^y$$

$$= \frac{e^{-2\lambda} \lambda^y}{y!} 2^y = e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^y}{y!}$$

إذا الدالة الهامشية لـ y تتبع توزيع بواسون .

$$f(X|Y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$= \frac{\dfrac{\lambda^y \, e^{-2\lambda}}{x!\,(y-x)!}}{e^{-2\lambda}\,(2\lambda)^y} = \binom{y}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}_{!}$$

$$; x = 0,1\ ,..$$

$$f(Y|X) = \frac{\lambda^{y-x}}{(y-x)}\ e^{-\lambda}\ \ ; y = x.x+1$$

$$p(X=Y) = \sum_{x=1} f(X,Y) = \sum f(x,y)$$

$$p(X=Y) = e^{-\lambda}$$

$$p(0 \le x \le 1\ , 0 \le y \le 1) = p(0,0) + p(1,0) + p(0,1) + p(1,1)$$

إشارة سالبة للعاملين ومنه خالية $\quad p(1,0) =$

$$p(0 \le x \le 1\ , 0 \le y \le 1) = p(0,0) + p(0,1) + p(1,1)$$

$$cor(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

$$E(X.Y) = \sum_{y=0}^{x}\sum_{x=0}^{y} \frac{X.Y\ \lambda^y e^{-2\lambda}}{x!\,(y-x)!}$$

$$= \lambda \sum_{y=1}^{\infty} \frac{Y\ \lambda^{y-1}\ e^{-2\lambda}}{(y-1)!} \cdot \sum_{x} \frac{(y-1)!}{(x-1)!\,(y-1)!}$$

يتبع بواسون $\quad (Y-1)$

$$E(Y-1) = 2\lambda \ \Longrightarrow E(Y) = 2\lambda + 1$$

$$E(X.Y) = \lambda\ (1+2\lambda)$$

$$cor(X,Y) = \lambda(1+2\lambda) = \lambda + 2\lambda^2$$

$$\lambda = -2\lambda^2$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{2}\,\lambda\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وبالمثل إذا كان المتوسط المشروط للمتحول Y بشرط $X = x$ دالة خطية في x فإننا نجد :

$$E(Y|X-x) = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\mu_X)$$

ويدعى خط انحدار Y على x

نتيجة : إذا كان المتوسط المشروط للمتحول y خطية في x وكان المتوسط المشروط للمتحول X دالة خطية في Y فإن مربع معامل الارتباط يساوي جداء معامل x في معامل Y

مبرهنة : إن :

$$E[\,E(Y|X)] = E(Y)$$

$$E[\,E(X|Y)] = E(X)$$

البرهان: نكتفي ببرهان إحدى العلاقتين .. بما أن :

$$E(Y|X) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y\,f(Y|X)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} Y\frac{f(x,y)}{f(x)}\,dy$$

$$E_X E(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Y\frac{f(x,y)}{f(x)}\,.f(x)dy\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Yf(X,Y)dx\,dy = E(Y)$$