معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثالثة

نظرية الاحتمالات

المحاضرة 18و19

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

2019-12-3

عملي

◄ دكتور المادة: أحمد الغصين

◄ المحاضرة الثامنة عشر والتاسعة عشر

الحالة الثانية : المتحولات المستمرة (طريقة دالة التوزيع التراكمية)

إن الحالة مهمة وأكثر استخداماً في الإحصاء عندما يكون المتحول العشوائي X مستمراً دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ ودالة توزيعه التراكمية $F(x)$ والدالة $Y = g(x)$ مستمرة أيضاً ، في هذه الحالة يكون المتحول العشوائي Y مستمراً ونهتم هنا بإيجاد دالة الكثافة الاحتمالية للمتحول Y ولتكن مثلاً $h(y)$

لإيجاد هذه الدالة نتبع الخطوات التالية :

1– التعبير عن الحادثة $(Y \le y)$ في R_Y بدلالة حادثة ما في R_X

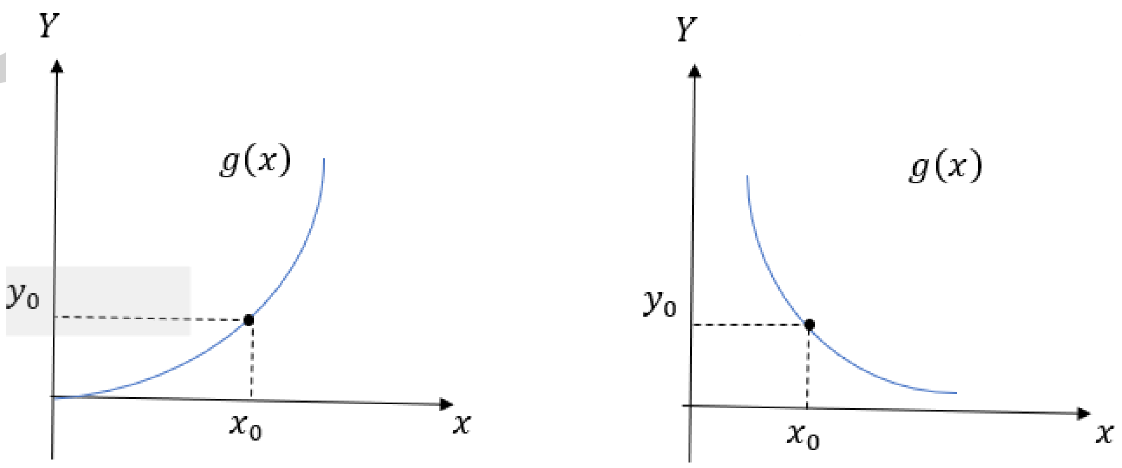
2- إيجاد $F_Y(y)$ دالة التوزيع التراكمية للمتحول Y

3- تفاضل $F_Y(y)$ للحصول على دالة الكثافة الاحتمالية $h(Y)$ مع تحديد نطاق تحويلها

إن هذه الخطوات يمكن تطبيقها على أية دالة ..

ولكن يوجد هناك عدة دوال يمكن الحصول على حل واضح وسهل لها .

فإذا كان $Y = g(x)$ دالة متزايدة أو متناقصة باضطراد كما هو مبين في الشكل التالي :



يمكن تطبيق هذه الخطوات بغض النظر أكانت متزايدة أو متناقصة باضطراد .

إذا كانت $g(.)$ متزايدة باضطراد فإن :

$$F_Y(Y) = p[Y \leq Y] = p[g(X) \leq Y\,] = p[X \leq g^{-1}(Y)]$$
$$= F[\,g^{-1}(Y)]$$

بتفاضل الطرفين وتطبيق قاعدة السلسلة للتفاضلات نجد :

$$h(Y) = \frac{d}{dY}\,F[g^{-1}(Y)] = f\left(\,g^{-1}(Y)\right)\frac{dg^{-1}(Y)}{dY}$$

حيث : $x = g^{-1}(Y)$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة التالية :

$$h(Y) = f(x)\frac{dx}{dY} \qquad (4-4)$$

أما إذا كانت $g(.)$ متناقصة باضطراد فإن :

$$h(Y) = -f(x)\frac{dx}{dY} \qquad (5-4)$$

يمكن ضم كل من $(4-4)$, $(5-4)$ في معادلة واحدة :

$$h(Y) = f(x) = \left|\frac{dx}{dy}\right| \qquad (6-4)$$

والتي يمكن اتخاذها قاعدة في حالتي التزايد والتناقص للدالة $Y = g(x)$

مثال :

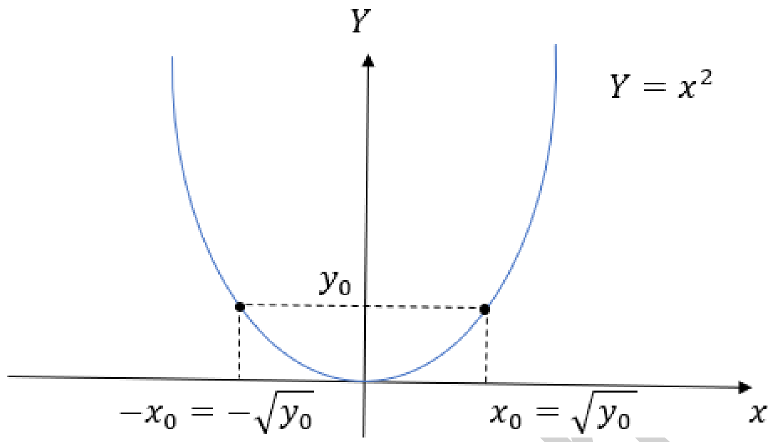
ـ إذا كانت $Y = aX + b$ فإننا نجد $h(Y) = \left|\frac{1}{a}\right|\,f\left(\frac{Y-b}{a}\right)$

ـ إذا كانت $Y = g(x)$ دالة غير مضطردة فإننا لا نستطيع تطبيق القاعدة $(6-4)$

مباشرة ، فمثلاً الدالة $Y = X^2$ ليست تحويلة من نوع واحد إلى واحد

أي أنها ليست دالة وحيدة القيمة حيث قيمتان من قيم x تصور إلى نفس قيمة Y

كما في الشكل التالي:



في مثل هذه الحالات نعود إلى الطريقة العامة باتباع الخطوات الثلاثة السابقة

$$H(Y) = p[Y \leq Y] = p[X^2 \leq Y]$$

$$= p[-\sqrt{Y} \leq X \leq \sqrt{Y}]$$

$$= F(\sqrt{Y}) - F(-\sqrt{Y})$$

بتفاضل الطرفين نجد :

$$h(Y) = \frac{f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{Y})}{2\sqrt{Y}} \qquad (7-4)$$

وبالمثل إذا كان $Y = |X|$ فإن :

$$H(Y) = p[Y \leq Y] = p[|X| \leq Y]$$

$$= p[-Y \leq X \leq Y]$$

$$= F(\sqrt{Y}) - F(-\sqrt{Y})$$

وبالتفاضل نحصل على :

$$h(Y) = f(Y) + f(-Y) \qquad (8-4)$$

مثال : إذا كان X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية هي :

$$f(x) = 2x \qquad ; 0 \le x \le 1$$

وكانت $Y = 3X + 1$ أوجد دالة كثافته الاحتمالية للمتغير Y

الحل :

ط1 :

$$F_Y(Y) = p(Y \le Y) = p(3X + 1 \le Y)$$

$$= p\left[X \le \frac{Y-1}{3}\right] = \int_0^{\frac{Y-1}{3}} 2x\, dx = \left(\frac{Y-1}{3}\right)^2$$

نفاضل الطرفين بالنسبة لـ Y نجد أن :

$$h(Y) = \frac{2}{9}(Y-1) \qquad ; 1 \le Y \le 4$$

ط2 : بتطبيق القاعدة نجد أن :

$$h(Y) = f(x)\left|\frac{dx}{dY}\right|$$

وحيث أن $Y = 3X + 1$ فإن $x = \frac{Y-1}{3}$ وعلى ذلك فإن :

$$h(Y) = f\left(\frac{Y-1}{3}\right)\left|\frac{1}{3}\right|$$

$$h(Y) = \frac{2}{9}(Y-1) \qquad ; \; 1 \le Y \le 4$$

مثال :

إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافته الاحتمالية هي :

$$f(x) = 2x \qquad ; 0 \le x \le 1$$

وكانت $Y = e^{-X}$ ، أوجد دالة كثافته الاحتمالية للمتغير Y .

الحل :

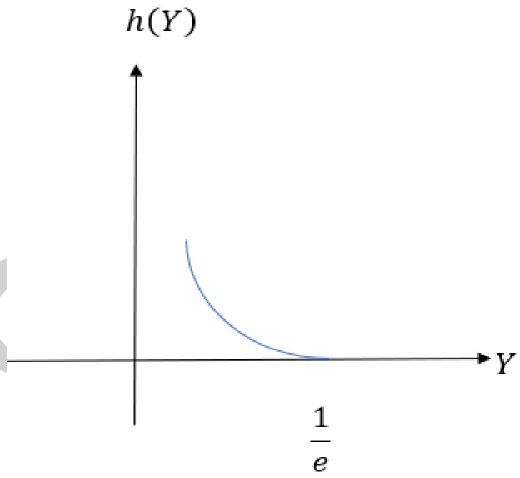
ط1 :

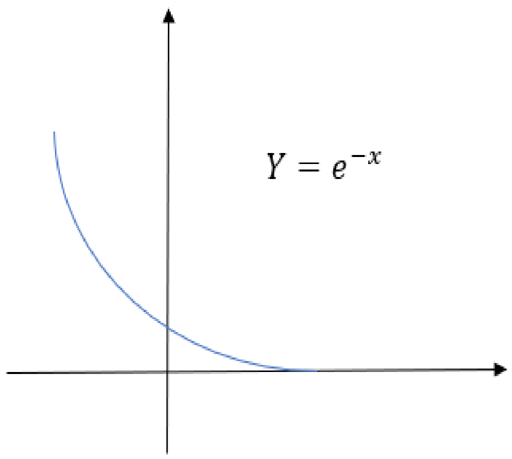
$$F_Y\,(Y) = p[Y \le Y] = p\,[\,e^{-X} \le Y] = p[X \ge -\ln Y\,]$$

$$= \int_{-\ln Y}^{1} 2x\,dx = 1 - (-\ln Y\,)^2$$

نفاضل الطرفين بالنسبة لـ Y نجد أن :

$$h(Y) = \begin{cases} -\dfrac{2}{Y}\ .\ \ln Y & ; \dfrac{1}{e} \le Y \le 1 \\ 0 & ; \text{غير ذلك} \end{cases}$$





حيث أن $Y = e^{-X}$ فإن $x = -\ln Y$

ط2 : بتطبيق القاعدة نجد أن :

$$h(Y) = f(x)\left|\frac{dx}{dY}\right| = f(-\ln Y)\,\frac{1}{Y}$$

$$h(Y) = \begin{cases} -\dfrac{2}{Y}\,.\ln Y & ;\dfrac{1}{e} \le Y \le 1 \\ 0 & ;\text{غير ذلك} \end{cases}$$

مثال :

إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X :

$$f(x) = e^{-X} \quad ; x \le 0$$

وكانت $Y = \sqrt{X}$ أوجد دالة كثافة الاحتمالية للمتغير Y .

الحل :

ط1:

$$F_Y(Y) = p[\,Y \le Y] = p\left[\sqrt{x} \le Y\right]$$

$$= p[\,X \le Y^2] = \int_0^{X^2} e^{-x}\,dx = 1 - e^{-Y^2}$$

بتفاضل الطرفين نجد أن :

$$h(Y) = 2Ye^{-Y^2} \qquad ;\ Y \ge 0$$

ط2: باستخدام القاعدة:

$X = Y^2$ فإن $Y = \sqrt{X}$

$$h(Y) = f(x)\left|\frac{dx}{dY}\right| = f\,(Y^2)\,|2Y|$$

$$= 2Y\,e^{-Y^2} \quad ;\ \ Y \ge 0$$

مثال إضافي (1) :

إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad ; -\infty < x < +\infty$$

وكانت $y = arc\, tgX$ احسب $h(Y)$

الحل : بما أن $y = arc\, tgX$ فإن : $X = tg\, Y$ ومنه

$$h(Y) = f(x)\left|\frac{dx}{dY}\right| = \sec^2 f(tg\, Y)$$

$$= \frac{\sec^2 Y}{\pi\,(1+tg^2\, Y\,)} = \frac{1}{\pi} \qquad ; -\frac{\pi}{2} \le X \le \frac{\pi}{2}$$

مثال إضافي (2) :

إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X هي :

$$f(x) = e^{-x} \qquad ; x \ge 0$$

أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y = X^2$

الحل :

نلاحظ أن الدالة $f(x)$ معرفة من أجل القيم الموجبة وبالتالي تطبق القانون :

$$h(Y) = \frac{f(\sqrt{Y}\,) + f(-\sqrt{Y})}{2\sqrt{Y}}$$

$$= \frac{e^{-\sqrt{Y}} + 0}{2\sqrt{Y}} = \frac{1}{2\sqrt{Y}}\, e^{-\sqrt{Y}} \qquad ; Y \ge 0$$

طريقة دالة توليد العزوم :

إذا كان X متحولاً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ معلومة وكان $Y = g(x)$

دالة في X فيمكننا إيجاد دالة توليد العزوم للمتحول Y بالشكل :

$$M_Y(t) = E(e^{Yt}) = E\left(e^{tg(x)}\right)$$

$$= \int e^{tg(x)} f(x)\,dx \qquad (11-4)$$

وبعد إيجاد هذا التكامل نحاول التعرف على توزيع احتمالي ما تكون هذه دالة توليد عزومه ويكون هذا التوزيع هو توزيع المتحول العشوائي Y

مثال : إذا كانت X متغيراً عشوائي يتبع توزيعاً طبيعياً معيارياً (قياسياً) وكان

$$Y = X^2$$

حيث $h > 0$ أوجد دالة كثافته الاحتمالية للمتغير Y وذلك باستخدام توليد العزوم .

الحل :

إن دالة الكثافة للمتغير X هي :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \quad ; -\infty < x < +\infty$$

ومنه دالة توليد العزوم للمتغير Y هي :

$$M_Y(t) = E(\, e^{Xt}\,) = E\,(\, e^{x^2\, t}\,)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty\infty}^{+\infty} e^{tx^2}\,.\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}(1-2t)}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2t}} = \left(1 - \frac{t}{1/2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

وهذه الدالة توليد العزوم لمتغير يتبع توزيع غاما بمعالم $\lambda = \frac{1}{2}$ ، $n = \frac{1}{2}$ أي توزيع كاي بدرجة واحدة من الحرية أي أن :

$$h(Y) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \; Y^{\frac{1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \, e^{-\frac{1}{2}Y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi Y}} \, e^{-\frac{1}{2}Y} \qquad ; 0 < Y < +\infty$$

طريقة التحولات :

إذا كان X , Y متحولين عشوائيين لهما توزيع احتمالي مشترك معلوم وكانت :

$Z = g_1(X, Y)$ دالة في هذين المتحولين عندئذٍ يكون Z متحولاً عشوائياً له توزيع احتمالي .

نتبع الخطوات التالية لمعرفة هذا التوزيع :

1- نجري التجربة E ونحصل على النتيجة $s \in S$

2- نحسب قيم $X(s)$, $Y(s)$

3- نحسب القيمة : $Z(s) = g_1(\,X(s)\,, Y(s)\,)$

وهنا نلاحظ أن Z تعتمد على النتائج s للتجربة العشوائية وعلى ذلك يكون :

$$Z = Z(s)$$

سنناقش في هذه الفقرة بالأشكال التالية :

$$Z = X + Y \quad , Z = X\,.\,Y \quad , Z = X/Y$$

$$Z = max(X, Y) \quad , Z = X/(X+Y)$$

وذلك عندما تكون هذه المتحولات منقطعة ثم عندما تكون مستمرة .

مثال : لتوضيح : إذا كانت الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين X , Y معطاة بالجدول التالي :

$X\backslash Y$	0	1	2	3
0	0.06	0.07	0.11	0.07
1	0.08	0.09	0.12	0.09
2	0.06	0.08	0.10	0.07

أوجد الدالة الاحتمالية للمتغير $Z = X + Y$

الحل : بما أن $X = 0, 1, 2$

$$Y = 0 , 1 , 2 , 3$$

فإن $X + Y = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5$

الآن نحسب احتمالات هذه القيم :

$$h(0) = p[Z = 0] = p[\, X = 0 , Y = 0]$$

$$= f(0,0) = 0.06$$

$$h(1) = p[\, Z = 1] = p[\, X = 0 , Y = 1] + p[\, X = 1 , Y = 0\,]$$

$$= f(0,1) + f(\,1,0) = 0.07 + 0.08 = 0.15$$

$$h(2) = p[Z = 2] = p[X = 0 , Y = 2] + p[X = 1 , Y = 1]$$

$$+ p[\, X = 2 , Y = 0\,]$$

$$= f(0,2) + f(1,1) + f(2,0) = 0.11 + 0.09 + 0.06 = 0.26$$

وبالمثل نحسب احتمالات باقي القيم فنحصل على الدالة التالية :

Z :	0	1	2	3	4	5
$h(Z)$:	0.06	0.15	0.26	0.27	0.19	0.07

الاربعاء : 2019/12/4 ((د. أحمد الغصن)

إذا كان الشعاع العشوائي (X,Y) متحولاً عشوائياً مستمراً دالة كثافته الاحتمالية المشتركة $f(x,y)$ وكانت $Z = g(X,Y)$ مستمراً في متحولين فإن Z هي عبارة عن متحول عشوائي مستمر دالة كثافته الاحتمالية $h(Z)$ لتحديد هذه الدالة نتبع الخطوات التالية :

1- نفترض متحولاً عشوائياً ثانٍ $U = g_2(X,Y)$ و هي دالة في X , Y

2- نوجد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتحولين Z , U ولتكن $K(Z,u)$

3- نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية المطلوبة للمتحول Z بتكامل الدالة $K\ (Z\ ,u)$

بالنسبة لـ u أي أن $(12-4)$ $h(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(Z,u)du$

ولإيجاد الدالة المشتركة للمتحولين Z , U نحتاج إلى المبرهنة التالية :

مبرهنة :

ليكن $(X\ ,Y)$ شعاعاً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية $f(x,y)$ وكانت

$U = g_2(X,Y)$ و $Z = g_1(X,Y)$ وبفرض g_2 , g_1 تحققان

1 ـ المعادلات :

$$z = g_1\ (x,y) \quad , \quad u = g_2\ (x,y)$$

لها حل وحيد بدلالة $y\ ,\ x$ بدلالة z , u وليكن $x = L_1\ (z,u)$, $Y = L_2(z,u)$

2 ـ التفاضلات الجزئية موجودة ومستمرة :

$$\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial Y}{\partial u}$$

فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتحولين z , u تعطى بالمعادلة :

$$k(z,u) = f[L_1(z,u), L_2(z,u)]\ |J| \qquad (13-4)$$

حيث أن

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial u}\end{vmatrix}$$

هذا المحدد يدعى محدد جاكوبي أو معامل التغيير ..

مثال :

إذا كان X متحولاً عشوائياً من النوع الطبيعي ، Y يتبع توزيع ${X_n}^2$ لنأخذ الآن متحولاً جديد : $\tau=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$

أوجد توزيع المتحول τ .

إذا علمت أن المتحولين X,Y مستقلين فإن :

$$f\,(X,Y)=f(X).f(Y)$$

الحل :

$$f(x,y)=f(x)\,.\,f(y)$$

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,y^{\frac{n}{2}-1}\;e^{-\frac{y}{2}}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,y^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-\frac{1}{2}(x^2+y)}$$

نفرض المتحول : $Y=U$ عندئذٍ يكون :

$$X=\frac{1}{\sqrt{n}}\,T\,U^{\frac{1}{2}}\qquad\Leftarrow$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t}\end{vmatrix}$$

$$J = -\frac{1}{\sqrt{n}} U^{\frac{1}{2}} \; ; K(U,t) = |J|\, f\big(\psi_1(u,t)\,, \psi_2(u,t)\big)$$

$$K(u,t) = \left|-\frac{1}{\sqrt{n}}\right| \cdot \frac{U^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2^{\frac{n}{2}}}} U^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)u}$$

$$g_1(t) = \int_0^{\infty} K\,(u,t)du$$

نأخذ تغيير في المتحول $\frac{1}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right) u = z$

ثم نكامل بالنسبة لـ z

وبالتالي نجد أنه يتبع توزيع ستودنت

مثال :

إذا كان $(X\,, Y\,)$ شعاعاً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية $f(x,y)$ معلومة أوجد حاصل جداء الضرب :
$z = X\,.Y$

الحل :

نفرض $u = X$

$$\frac{z}{u} = Y$$

$$z = X\,.Y$$

ومنه معين جاكوبي :

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{u} & -\frac{z}{u^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{u}$$

$$K(z,u) = \left|-\frac{1}{u}\right| . f\left(u , \frac{z}{u}\right)$$

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|-\frac{1}{u}\right| f\left(u , \frac{z}{u}\right) du \qquad (16-4)$$

الفصل الخامس :

سلاسل ماركوف وتطبيقاتها :

الأشعة الاحتمالية و المصفوفات العشوائية :

تعريف :

يدعى الشعاع $\vec{v} = (v_1 , \dots , v_n)$ شعاعاً عشوائياً إذا كانت مركباته غير سالبة ومجموع هذه المركبات يساوي الواحد .

أي إذ حققت :

1 - $v_1 , v_2 , \dots , v_n$ جميعها عناصر غير سالبة

2 - $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 1$

المصفوفة العشوائية :

يقال عن مصفوفة إنها مصفوفة عشوائية إذا وقفط إذا كان جميع مدخلاتها موجبة ومجموع كل صف (أو سطر) من صفوفها يساوي الواحد ، بمعنى أي مصفوفة مربعة تدعى مصفوفة عشوائية إذا وفقط إذا كان كل سطر من أسطرها يشكل شعاعاً احتمالياً .

مبرهنة :

إذا كانت A , B مصفوفتان عشوائيتان فإن حاصل جداؤهما AB هو مصفوفة عشوائية .

وكذلك فإن جميع قوى A^n , B^n مصفوفات عشوائية .

المصفوفات العشوائية المنتظمة :

يقال أن المصفوفة العشوائية A بإنها مصفوفة عشوائية منتظمة إذا وفقط إذا كان جميع عناصر إحدى أسسها A^n موجبة ، بمعنى أن العنصر o لا يظهر فيها ابتداء من الاس الثاني .

مثال : (1) :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة عشوائية منتظمة لأن :

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

حيث أن جميع عناصر A^2 موجبة .

مثال (2) :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \end{bmatrix} \quad , \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{37}{64} & \frac{27}{64} \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{175}{256} & \frac{81}{256} \end{bmatrix}$$

عناصر الصف الأول في هذه المصفوفات هي 1 , 0 ولم تتغير عند حساب الأسس إذاً المصفوفة A ليست مصفوفة عشوائية منتظمة .

((نقول عن المصفوفة منتظمة إذا كانت من الأس الثاني لا يوجد صفر))

النقطة الثابتة والمصفوفات العشوائية المنتظمة :

مبرهنة : لتكن A مصفوفة عشوائية منتظمة عندئذٍ :

1- يوجد للمصفوفة A شعاعاً ثابتاً وحيد مثل $\vec{t}$ جميع عناصره موجبة .

2- متتالية القوى $A , A^2, A^3, \dots$ للمصفوفة A تؤول في النهاية لمصفوفة t والتي كل صف من صفوفها هي النقطة الثابتة t .

3- إذا كان $\vec{p}$ أي شعاع احتمالي فإن متتالية الأشعة $\vec{p}A , \vec{p}A^2, \vec{p}A^3, \dots$ نقول في النهاية إلى النقطة الثابتة t

---

مثال :

أوجد الشعاع الاحتمالي الثابت والوحيد للمصفوفة العشوائية المنتظمة :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

الحل :

بما أن المصفوفة المعطاة A من المرتبة 2×2 فإن الشعاع الاحتمالي الثابت والوحيد t يتألف من عنصرين هما $\tau = (x , 1 , -x)$ نضع $t\, A = t$ فنجد أن :

$$(\, x , 1 , -x \,) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \; (\, x , 1 , -x \,)$$

$$4x = 1 \;\Rightarrow x = 0.25$$

$$\Rightarrow t = (\, 0.25 , 0.75 \,)$$

وحسب مبرهنة سابقة ، فإن المصفوفة T كل سطر من أسطرها هو عناصر الشعاع الثابت والوحيد للمصفوفة A بمعنى أن :

$$T = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

لنوجد الآن متتالية القوى للمصفوفة المعطاة أن :

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{7}{27} & \frac{20}{27} \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} \frac{7}{27} & \frac{20}{27} \\ \frac{20}{81} & \frac{61}{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.74 \\ 0.27 & 0.75 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن العناصر المناظرة للمصفوفة A^4 تقترب من العناصر للمصفوفة T ..

انتهت المحاضرة التاسعة عشرة ..