معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثالثة

التحليل التابعي1

المحاضرة 6

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year

نظري

◄ دكتور المادة: جمال مللي

◄ المحاضرة السادسة عنوان المحاضرة : التطبيق المستمر

تذكرة :

حتى تتقارب متتالية x_n في فضاء متري من x:

إذا حققت الشرط :

$\exists x \in X : \forall\, V$ جوار مفتوح لـ x : $\exists\, N \in N^*$

$$n \geq N \ \rightarrow x_n \in V$$

وتكون نهايتها وحيدة في الفضاء .

ولكن ذلك غير صحيح في الفضاء التبولوجي لتوضيح ذلك في المثال الأتي :

مثال :

لتكن المتتالية : $\{(x_n = 1\,)_{n\in N}\}$ ما هي الجوارات العدد 1 في المتتالية x_n :

$$v_1 = \{(1,2), X\} \quad x_n \rightarrow 1$$

$$v_2 = \{(1,2), X\} \quad x_n \rightarrow 2$$

$v_3 = \{(3,4), X\}$ لا تتقارب

لا جوار لها لأنها لا تحوي 1 هو حدود المتتالية

$v_4 = \{(3,4), X\}$ لا تتقارب

مثال 2 :

$\tau = \{\emptyset, X\}$ ، ما هي جوارات τ ؟

$$v_1 = \{(1,2), X\} \quad x_n \to 1$$

$$v_2 = \{(1,2), X\} \quad x_n \to 2$$

$$v_3 = \{(3,4), X\}$$

$$v_4 = \{(3,4), X\}$$

نلاحظ من هذا المثال أن كل متتالية متقاربة في التوبلوجيا ليس من الضروري يكون لها نهاية وحيدة .

فالمثال 2 : يوضح ذلك حيث كل الجوارات تتقارب من نهاية هي X وبالتالي ليست وحيدة في التبولوجيا العامة .

مبرهنة التطبيق المستمر :

تكمن أهمية هذه المبرهنة أننا استطعنا من خلالها استبدال مفاهيم طبولوجية

مثل الجوارات بفضاء متتاليات حيث أن التعامل مع المتتاليات أسهل بكثير ، وتنص هذه المبرهنة على ما يلي :

الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق $T: X \to Y$ من فضاء متري (X, d) في فضاء متري $(Y, \tilde{d})$ مستمراً في النقطة x_0 من x هو أن يقتضي الشرط .

$$T \text{ مستمراً عند } x_0 \Leftrightarrow (if \ \ x_n \longrightarrow x_0 \quad \Longrightarrow \quad Tx_n \longrightarrow Tx_0)$$

البرهان :

$(\Longleftarrow)$ لنفرض أن T مستمراً عند النقطة $x_0 \in X$ وعلينا إثبات أن إذا كان $x_n \longrightarrow x_0$ فإن $Tx_n \longrightarrow Tx_0$

لدينا كون T مستمراً عند x_0 فإنه

$$\forall \varepsilon > 0 \ ; \exists \delta > 0 \ ; d(x, x_0) < \delta \ \Longrightarrow \tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$$

وذلك $\forall x \in X$

ولنفرض وجود متتالية اختيارية $x_n \in X$ تسعى إلى x_0 إن هذا التقارب يتم في X عندئذٍ حسب تعريف تقارب متتالية يكون ليدينا

$$\forall \varepsilon > 0 \;; \exists n_0 \in N \;;\; n \geq n_0 \;;\; d(x_n, x_0) < \varepsilon \ldots (2)$$

لكن في العلاقة (2) لو استبدلنا ε بـ δ حيث $\delta > 0$ يكون لدينا :

$$\forall \varepsilon > 0 \;; \exists \delta > 0 \;; d(x_n, x_0) < \delta \implies \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$$

(اي تحقق لدينا أن المسافة بين عناصر المتتالية x_n اصغر من δ وبالتالي يكون لدينا المسافات بين صور هذه العناصر اصغر من ε

وبالتالي نستطيع أن نكتب :

$$\forall \varepsilon > 0 \;; \exists n_1 \in N \;;\; n \geq n_1 \;;\; \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$$

وهذا تعريفاً هو $Tx_n \longrightarrow Tx_0$ ومنه يتم المطلوب

$(\Longrightarrow)$: لنفرض أن الشرط التالي محقق $x_n \longrightarrow x_0 \Rightarrow Tx_n \longrightarrow Tx_0$ ولنثبت أن T مستمراً .

-لنفرض جدلاً أن T غير مستمر ومنه يكون لدينا

يوجد عدد موجب $\varepsilon > 0$ بحيث انه يقابل كل $\delta > 0$ عنصر x_n مغاير ل x_0 بحيث يحقق $d(x_n, x_0) < \delta$ ويكون في الوقت نفسه $\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$

$$\exists \varepsilon > 0 \;; \forall \delta > 0 \;; \exists d(x_n, x_0) < \delta \implies \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$$

باختيار $\delta = \frac{1}{n} \geq 0$ نجد.

$$\exists x_1 \;:\; d(x_1, x_0) < \frac{1}{n} \;;\; \tilde{d}(Tx_1, Tx_0) \geq \varepsilon$$

$$\exists x_2 \;:\; d(x_2, x_0) < \frac{1}{n} \;;\; \tilde{d}(Tx_2, Tx_0) \geq \varepsilon$$

$$\vdots$$

$$\exists x_n \;:\; d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \;;\; \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$$

وبالتالي يكون لدينا

$$0 \leq d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$$

بأخذ نهاية الأطراف المتراجحة عندما $n \to \infty$ يكون .

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0 \quad , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

ومنه حسب مبرهنة الإحاطة يكون $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$

أي أن نهايات المسافات بين عناصر المتتالية و x_0 تسعى إلى الصفر فإن حسب الفرض نهايات المسافات بين صور عناصر المتتالية يسعى إلى صورة x_0 أي $Tx_n \longrightarrow Tx_0$

أي أن $\lim_{n\to\infty} \tilde{d}(Tx_n, Tx_0) = 0$

وهذا تناقض لأنه لدينا فرضاً $\tilde{d}(Tx_n, Tx_0) \geq \varepsilon$

ومنه الفرض الجدلي خاطئ أي أن T مستمر وتم المطلوب.

تمرين :

1- ليكن $X \neq \emptyset$:

$$f: X \to R$$
$$d: X * X \to R$$
$$(x, y) \to d(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

1-هل (x, d) شبه مسافة؟

2- f متباين $\Leftarrow d$ مسافة ؟

الحل :

حتى يكون d شبه مسافة يجب أن يحقق الشروط :

$$1 - d(x, y) \geq 0 \quad ; |f(x) - f(y)| \geq 0$$

$$2 - x = y \Longrightarrow f(x) = f(y) \Longrightarrow f(x) - f(y) = 0 \Longrightarrow |f(x) - f(y)| = 0$$

$$3\text{-}d(x,y) = d(y,x) \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)|$$

$4\text{-}d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ متراجحة المثلث

$$d(x,y) = |f(x) - f(y)| =$$
$$|f(x) - f(z) + f(z) + f(y)| \le |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)|$$
$$= d(x,z) + d(z,y)$$

وبالتالي d فإن نصف مسافة وإن (x,d) شبه فضاء متري .

وإذا أخذنا $X \equiv R$

$$f(x) = I(x) = x$$
$$|f(x) - f(y)| = 0 \Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y)$$
$$\Rightarrow x = y$$

أي أن (x,d) أصبح فضاء متري⟸ومنه f متباين .

ملاحظة : إذا كان f متباين و d تحقق شروط نصف المسافة عندئذ فإن (X,d) فضاء متري

مثال : (R,d) $\qquad f(x) = arc\tan x$

$$X =]0,+\infty[: f(x) = \ln x$$
$$d:]0,+\infty[*]0,+\infty[\to R$$
$$d(x,y) = \ln\left|\frac{x}{y}\right|$$

3- إذا كان (X,d) فضاء متري حيث $D = \sqrt{d}$ فإن $D_1 = d^2$ بحيث (X,D) ليس فضاء متري

الحل :

لنتحقق من الشروط :

$$1 - d(x,y) \ge 0 \Rightarrow \sqrt{d(x,y)} \ge 0 \Rightarrow D(x,y) \ge 0$$

$$2-d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y \Leftrightarrow \sqrt{d(x,y)}=0 \Leftrightarrow D(x,y)=0$$

$$3\text{-}d(x,y)=d(y,x) \Rightarrow \sqrt{d(x,y)}=\sqrt{d(y,x)} \Rightarrow D(x,y)=D(y,x)$$

$$4\text{-}d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y) \le d(x,z)+d(z,y)+2\sqrt{d(x,z)}\sqrt{d(z,y)}$$

$$=\left(\sqrt{d(x,z)}+\sqrt{(z,y)}\right)^2$$

$$\le \sqrt{d(x,z)}+\sqrt{d(z,y)} \xrightarrow{\text{بجذر الطرفين}} \sqrt{d(x,y)}$$

$$\rightharpoonup -d(x,y) \le d(x,z)+d(z,y)$$

أي أن $D=\sqrt{d}$ هو فضاء متري .

$$d: |.|$$

لو أخذنا النقاط 0,2,4 :

$$(0-4)^2 \le (0-2)^2+(2+4)^2$$

$$16 \nleq 4+36$$

هذا غير ممكن وبالتالي هو ليس فضاء متري.

تمرين :

إذا كان (X,d) أي فضاء متري ،:

$$\sigma(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)}$$

هل هو فضاء شبه متري ؟ .

الحل :

لإثبات أنه مسافة باستخدام الشرط التالي :

$$\forall x,y \in X : x \neq y\,;\ \exists n_0 \in N\,;\ d_{n_0}(x,y) > 0$$

هو موجب وتبديلي ويحقق متراجحة المثلث :

أيا كان $x,y,z \in X$ فإن :

1) $d(x,y) \geq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)} \geq 0 \Rightarrow \sigma(x,y) \geq 0$

2) $\sigma(x,y) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)} = 0 \Rightarrow d_{n(x,y)} = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0$

-2 $\Rightarrow x = y$

3) $\sigma(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(x,y)}{1+d_n(x,y)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(y,x)}{1+d_n(y,x)} = \sigma(y,x)$ "خاصة التناظر"

$$d_n(x,y) \leq d_n(x,z) + d_n(z,y)$$

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

نفرض أن : $\alpha = d(x,y)$

$$\beta = d(x,z)$$
$$\gamma = d(z,y)$$

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} \leq \frac{\beta}{1+\beta} + \frac{\gamma}{1+\gamma}$$

كون d دالة مسافة عندئذ $\alpha \leq \beta + \gamma$ نضيف القدار $\alpha(\beta+\gamma)$ للمتراجحة :

$$\alpha + \alpha(\beta+\gamma) \leq (\beta+\gamma) + \alpha(\beta+\gamma)$$

$$\alpha(1+\beta+\gamma) \leq (\beta+\gamma)(1+\alpha)$$

نقسم طرفي المتراجحة علي $(1+\beta+\gamma)(1+\alpha)$ ومنه نحصل على :

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} \leq \frac{\beta+\gamma}{1+\beta+\gamma} = \frac{\beta}{1+\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{1+\gamma+\beta} \leq \frac{\beta}{1+\beta} + \frac{\gamma}{1+\gamma}$$

ومنه :

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} \leq \frac{\beta}{1+\beta} + \frac{\gamma}{1+\gamma}$$

نأخذ المجموع $\sum_{n=1}^{\infty}$ ونضربه ب $\frac{1}{2^n}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{\alpha}{1+\alpha} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{\beta}{1+\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{\gamma}{1+\gamma}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

$$\text{-}d_n(x,y) \leq d_n(x,z) + d_n(z,y)$$

ومنه d_n شبه مسافة .

لإثبات أن d_n مسافة من الشرط 3 :

$$x = y \Rightarrow d_{n(x,y)} = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0$$

نفرض جدلا أن $x \neq y$

ومنه $\exists\, n_0 \in N \,; d_{n_0(x,y)} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2_i}\frac{d_{n_0}(x,y)}{1+d_{n_0}(x,y)} > 0 \Rightarrow d(x,y) > 0 \Rightarrow x = y$

وهذا يناقض الفرض ومنه d_nمسافة

انتهت المحاضرة