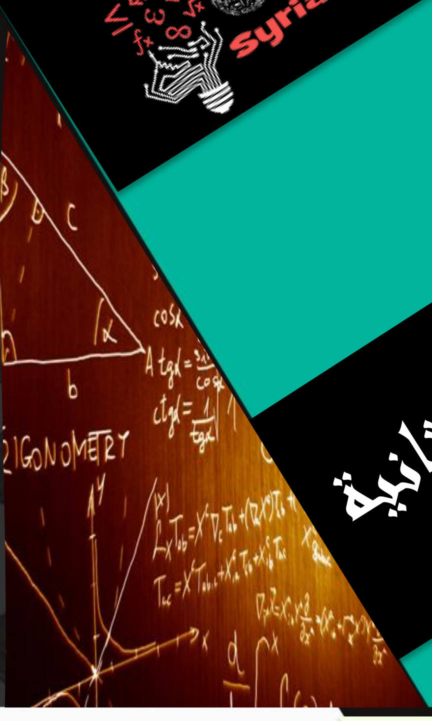
معك نحو

التخرج

Syria Math Team



السنة الثانية

البنى الجبرية1

المحاضرة 9

◄ دكتور المادة: فادي أبو حرب

◄ المحاضرة: التاسعة ◄ عنوان المحاضرة: مبرهنات

مبرهنة:

مبرهنة خوارزمية القسمة: ليكن $a, b \in Z$ بحيث $b > 0$

عندئذٍ يوجد $q, r \in Z$ بحيث $a = qb + r$ وان $0 \le r \le b$ زد على ذلك فإن q, r يتعينان بشكل وحيد.

الاثبات:

لنأخذ المجموعة: $\boldsymbol{S = \{a - k.b; k \in Z, a - k.b \ge 0\}}$

نميز حالتين: الحالة الأولى: $0 \in S$ عندئذٍ: $S \neq \emptyset$

وبالتالي يوجد $\boldsymbol{k_0 \in Z}$ بحيث: $\boldsymbol{a - k_0.b = 0}$ أي $\boldsymbol{a = k_0.b}$

وهنا نأخذ $r = 0; q = K_0$ والمبرهنة محققة في هذه الحالة.

الحالة الثانية: $0 \notin S$

لنبرهن في هذه الحالة ان $N^* \supseteq S \neq \emptyset$ نميز ثلاث حالات:

1- اذا كان $a > 0$ فإن $a - k.b = a - 0.b > 0$ وبالتالي $a - 0.b \in S$
2- اذا كان $a < 0$ فإن:

$a - k.b = a - (2a)b > 0$ وبالتالي $a - 2ab \in S$

3- اذا كان $a = 0$ فإن $a - k.b = 0 - (-1)b > 0$ وبالتالي $-(-1)b \in S$

مماسبق نجد ان $\emptyset \neq S \subseteq N^*$

وحسب مبرهنة سابقة فإن S تحوي عنصر أصغر وليكن r ومنه يوجد $q \in Z$ بحيث $r = a - q.b$

وان $r > 0$ لان $0 \notin S$

- نريد اثبات ان $r < b$ حتى نبرهن ذلك سنبرهن ان $r > b$ و $r = b$ غير محققين.
- لنفرض جدلاً ان $r > b$ عندئذٍ:

$$a-(q+1)b=a-q.b-b=r-b>0$$

ومنه $a-(q+1)b>0$ أي $S\ni a-(q+1)b$

ومنه جهة أخرى لدينا $a-(q+1)b=r-b<r$ اصبح لدينا عنصراً $a-(q+1)b$ من S

واصغر من r وهذا تناقض لان r عنصراً اصغر من S

والفرض الجدلي جاطئ.

- ولنفرض جدلاً ان $r=b$ عندئذٍ: $a-(q+1)b=a-q.b-b=r-b=0$ ومنه:
  $s\ni a-(q+1)b$ أي: $0\in S$ وهذا غير ممكن لأننا فرضنا في هذه الحالة ان $0\notin S$ من خلال نقض الفرض الجدلي في الحالتين نجد ان $r<b$

- ولنثبت وحدانية q,r:
  لنبرهن انه يوجد $q_1,r_1\in Z$ بحيث $0\leq r_1<b$ ، $a=q_1.b+r_1$ عندئذٍ وكون $a=q.b+r$

يصبح لدينا:

$$q_1b+r_1=q.b+r$$

$$b(q-q_1)=r_1-r$$

لنفرض جدلاً ان: $r_1\neq r$ وان $r_1>r$

عندئذٍ: $\boxed{r_1-r\geq b}$ (1)

لان: $b,\ q-q_1,r_1-r$ هي مقادير موجبة ولدينا ايضاً ان $0\leq r\leq b$ ، $0\leq r_1\leq b$

وهذا يعطينا $\boxed{r_1-r<b}$ (2)

من 1 و2 نحصل على تناقض.. فالفرض الجدلي خاطئ فإن $r=r_1$ و $q=q_1$

لان : $\begin{cases}a=q.b+r\\a=q_1.b+r\end{cases}=q=q_1$

وبذلك يتم المطلوب.

ملاحظة: ان المبرهنة السابقة تبقى صحيحة اذا كان $b<0$ وفي هذه الحالة يكون $a=q.b+r$ حيث $0\leq r<|b|$ ونسمي a المقسوم و b المقسوم عليه ونسمي q ناتج القسمة ونسمي r باقي القسمة.

تعريف: القاسم المشترك الأعظم: ليكن a, b عددين صحيحين مغايرين للصفر والقاسم المشترك الأعظم للعددين a, b هو اكبر عدد صحيح موجب يقسم كلاً من a, b بآنٍ واحد، ونرمز له ب $gcd(a, b)$.

- **اذا كان $gcd(a, b) = 1$ نقول في هذه الحالة ان a, b عددين اولين فيما بينهما.**

مبرهنة بدون برهان:

ليكن a, b عددين صحيحين مغايرين للصفر ،عندئذٍ يوجد $s, t \in Z$ بحيث $\gcd(a, b) = a.s + b.t$

مثال: ماهو القاسم المشترك الأعظم ل:

$$gcd(15,24) = 3$$

$$3 = 15s + 24t$$

نلاحظ: $s = -3 \quad ; \quad t = 2$

ويمكن ايضاً: $s = -27 \quad ; \quad t = 17$

تعريف: المضاعف المشترك الأصغر: المضاعف المشترك الأصغر للعددين المغايرين للصفر a, b هو اصغر عدد صحيح موجب يكون مضاعفاً لكل من العددين a, b في آنٍ واحد ونرمز له ب $Icm(a, b)$

انتهت المحاضرة

إعداد: وئام النمر، ولاء الأخضر، أبرار الخالد