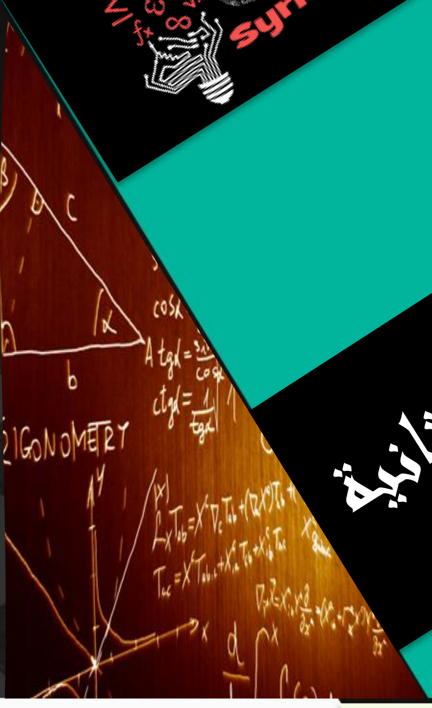
معك نحو

التخرج

Syria Math Team



السنة الثانية

التحليل3

المحاضرة 2+3

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل:

هاتف – واتساب: 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

نظري

◀ دكتور المادة: يحيى قطيش

◀ المحاضرة: الثانية و الثالثة

◀ عنوان المحاضرة: الجداءات

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-الجداءات غير المنتهية

2-تقارب الجداءات

3-متتاليات التوابع

الجداءات غير المنتهية :

لنأخذ متتالية من الأعداد الحقيقية $\{a_n\}$ ، عندئذ نسمي

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 . a_2 . \dots \; . a_n . \dots \dots .$$

جداءً غير منتهٍ

حيث $\prod$ رمز الجداء و عندئذٍ نعرف متتالية الجداءات الجزئية بالشكل : $\{p_n\}$ حيث

$$p_1 = a_1$$
$$p_2 = a_1 . a_2$$
$$p_3 = a_1 . a_2 . a_3$$
$$p_n = a_1 . a_2 . a_3 . \dots . \; . a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$$

و بالتعريف لدينا أنه :إذا كانت نهاية متتالية الجداءات الجزئية موجودة و محدودة عندما $n \to \infty$ و ليكن :

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \in \mathbb{R}^*$$

يكون الجداء غير المنتهي متقارب و تكون قيمته تساوي هذه القيمة p أي :

$$\exists\, p \in \mathbb{R}^* : \lim_{n\to\infty} p_n = p \Leftrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} p_n = p$$

و زيادةً في التوضيح :

- نقول عن $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ أنه متقارب إذا كان :

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \quad , \quad p \neq \pm\infty \quad , \quad p \neq 0 \leftarrow$$

- نقول أن $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ أنه متباعد إذا كان :

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} p_n = 0 \\ \text{أو } \lim_{n\to\infty} p_n = \pm\infty \\ \text{أو غير موجودة} \end{cases}$$

☜من الواضح أنه يكفي أن يكون أحد المضاريب ... $a_1.a_2.a_3$ صفراً كي تكون قيمة الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ مساوية للصفر☞

الخواص الأساسية للجداءات غير المنتهية:

ليكن لدينا الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ و سنكتبه على شكل جدائين كما يلي :

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k . \prod_{k=n+1}^{\infty} a_k = p_n . \pi_n$$

حيث: π_n الباقي النوني للجداء غير المنهتي

p_n الحد العام لمتتالية الجداءات الجزئية

مبرهنة(1):

إذا كان الحد العام لمتتالية الجداءات الجزئية هو $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ فإن الشرط اللازم والكافي لتقارب الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ هو تقارب الباقي النوني $\pi_n = \prod_{k=n+1}^{\infty} a_k$ أياً كان العدد الطبيعي n

فكرة البرهان :

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_k . \pi_n$$
$$= p_n \pi_n \quad : \quad a_n \neq 0$$

مبرهنة(2):

إذا كان الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارب فإن الباقي النوني $\pi_n = \prod_{k=n+1}^{\infty} a_k$ يحقق الشرط:

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n = 1$$

الإثبات:

لما كان الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارباً فهذا يعني أنه يوجد $p \in \mathbb{R}^*$ بحيث $p = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$ و تحديداً هو نهاية متتالية الجداءات الجزئية $\{p_n\}$ $(\lim_{n\to\infty} p_n = p)$ ، و وجدنا قبل قليل أن

$$p = \prod_{n=1}^{\infty} a_n = p_n.\pi_n \quad \Longrightarrow \quad \pi_n = \frac{p}{p_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{p}{p_n} = \frac{p}{p} = 1$$

و هو المطلوب ☺

مبرهنة(3):

إذا كان الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارب فإن: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

الإثبات: بما أن $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ فهذا يعني أن متتالية مجاميعه الجزئية متقاربة من عدد و ليكن p و عليه يمكن ملاحظة أن :

$$p_n = a_1.a_2 \ldots..a_n \quad \& \lim_{n\to\infty} p_n = p$$

$$p_{n-1} = a_1.a_2 \ldots a_{n-1} \quad \& \lim_{n\to\infty} p_{n-1} = p$$

و أخيراً بقسمة p_n على p_{n-1} نجد أن :

$$a_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{p}{p} = 1$$

(صحيحة إذا كان الجداء متقارب)

ملاحظة: إن الشرط $a_n \to 1$ هو شرط لازم لتقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ ولكنه غير كافٍ للتقارب بملاحظة المثال الآتي:

لنأخذ الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ فنلاحظ أن $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ إلا أننا سنثبت أنه **متباعد** باستخدام متتالية الجداءات الجزئية كما يلي :

$$p_n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1}.\frac{3}{2}.\frac{4}{3} \ldots.\frac{n}{n-1}.\frac{n+1}{n} = (n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

فالجداء متباعد بالرغم من كون حده العام يسعى إلى الصفر و هذا المثال المعاكس كافٍ لإثبات أن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح بالضرورة.

من المناسب أحياناً كتابة a_n بالشكل $a_n = 1 + b_n$ فيأخذ الجداء غير المنتهي(المدروس) الشكل $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + b_n)$ ويكون الشرط اللازم للتقارب هو $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

مبرهنة: الشرط اللازم و الكافي لتقارب الجداء $a_n > 0$: $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ هو تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ و عند تحقق هذا الشرط فإنه يكون $p = e^s$ بحيث s هو مجموع المتسلسلة و p قيمة هذا الجداء

الإثبات: نشكل متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ حيث أن حدها العام :

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$$

و حسب خواص اللوغاريتم ($\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$) يكون :

$$s_n = \ln(a_1 . a_2 \dots a_n) = \ln(\prod_{k=1}^{n} a_k)$$

$$\Longrightarrow s_n = \ln p_n \Rightarrow p_n = e^{s_n}$$

و ذلك علماً أن التابعين الأسي واللوغاريتمي مستمرين و الآن :

1) إذا كان الجداء متقارب $\lim_{n\to\infty} p_n = p > 0$ فإن المتسلسلة متقاربة

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \ln p_n = \ln p$$

2) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} s_n = s \Leftarrow \lim_{n\to\infty} p_n = e^s$

أي تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ يؤدي إلى تقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ و العكس بالعكس

شكل آخر للمبرهنة:

تقارب الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + b_n)$ يلزم ويكفي لأن تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + b_n)$ وعندها إذا كان مجموع المتسلسلة هو s فإن قيمة الجداء هي e^s أي $p = e^s$

مبرهنة: إذا تحققت المتراجحة $(b_n > 0)$ أو $(b_n < 0)$ على الأقل من أجل قيم كبيرة للعدد الطبيعي n فإن الشرط اللازم و الكافي لتقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + b_n)$ هو تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

الإثبات:

إذا كان $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + b_n)$ متقارب فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + b_n)$ و $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} b_n = 0$

(حسب المبرهنة السابقة) و لنشكل النهاية:

$$\left(\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1\right)\quad:\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}=1$$

و حسب قاعدة المقارنة لمتسلسلتين من نوع واحد يكون لدينا المتسلسلة $\sum b_n$ متقاربة مثل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$

وبالعكس تتحقق كفاية الشرط أي إذا كانت $\sum b_n$ متقاربة فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+b_n)}{b_n}=1$$

فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ من نوع واحد أي $\sum_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ متقاربة وبالتالي الجداء متقارب.

مبرهنة: لشرط اللازم والكافي لكي يكون الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ أو $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ مساوياً للصفر هو أن تكون قيمة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\ln a_n$ أو $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$ مساوية $-\infty$ و هذا يتم بشكل خاص إذا كانت $b_n>0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة

$$p_n=e^{s_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_n=0\Rightarrow s_n\xrightarrow[n\to\infty]{}-\infty$$

$p=e^{-\infty}=0$ قيمة الجداء غير المنتهي

مبرهنة : إذا تقاربت المتسلسلتان $\sum b_n$ و $\sum b_n^2$ فإن الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ متقارب .

الاثبات : من نشر دالة اللوغارتم:

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$$

$$\ln(1+b_n)=b_n-\frac{1}{2}b_n^2+\frac{1}{3}b_n^3-\cdots$$

هاد رمز بيعني انو الباقي بعد الحد b_n^2 يهمل لصغره

$$\ln(1+b_n)=b_n-\frac{1}{2}b_n^2+O(b_n^2)$$

الآن :

نقل حدود مع تغيير إشارة المنقول

$$b_n-\ln(1+b_n)=\frac{1}{2}b_n^2-\frac{1}{3}b_n^3+\frac{1}{4}b_n^4+\cdots$$

نقسم علة b_n^2 :

$$\frac{b_n-\ln(1+b_n)}{b_n^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}b_n+\cdots.$$

نأخذ النهايات :

$$\lim \frac{b_n - \ln(1+bn)}{b_n^2} = \lim\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}b_n + \cdots.\right) = \frac{1}{2}$$

و بالتالي حسب معيار المقارنة يكون المتسلسلتان $\sum(\mathrm{b_n} - \ln(1+b_n))$ و $\sum \mathrm{b_n^2}$ من نفس النوع

و بما أن $\sum b_n^2$ متقاربة فإن $\sum \ln(1+\mathrm{b_n})$ متقاربة

تمرين: أوجد قيمة الجداء:

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}$$

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$

$$= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

$$p_n = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{8}\cdots\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{13}{7}\cdots\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{2}{3}$$

أي أن قيمة الجداء هي $\frac{2}{3}$ والجداء متقارب

التقارب المطلق والتقارب الشرطي للجداء غير المنتهي:

تعريف: نقول عن الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ متقارب بإطلاق إذا وفقط إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ متقاربة بإطلاق ونقول أن هذا الجداء متقارب شرطياً إذا وفقط إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ متقاربة شرطياً.

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي لتقارب الجداء غير المنتهي $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ بالإطلاق هو أن تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ بالإطلاق.

مثال:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^s}\right)$$

يكون متقارب عندما $s > 1$ ويكون متباعد إذا كان $0 < s \leq 1$ و ذلك تبعاً لما نعرفه عن المتسلسلة الريمانية

مثال: أثبت أن الجداء متقارب شرطياً

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$$

نأخذ $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ نجد أنها متقاربة حسب لايبتنز لأن الحد العام يسعى للصفر ومتناقصة بالقيمة المطلقة لكن المتسلسلة $\sum \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|$ متباعدة و بالتالي الجداء متقارب شرطياً

مثال: ادرس الجداء

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$$

ندرس المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ حسب اختبار لايبتنز يكون الاختبار محقق:

(1 الحد العام:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

(2 القيم المطلقة لحدها العام متناقصة فهي متقاربة حسب لايبتنز نأخذ:

$$\sum \left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right| = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

سلسلة القيم المطلقة متباعدة (ريمانية $p < 1$) بالتالي الجداء متقارب شرطياً فقط

متتاليات التوابع(الدوال):

تعريف: لتكن I مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقة $\mathbb{R}$

ولتكن H مجموعة التوابع الحقيقة المعرفة على I عندها بمقابلة كل عدد طبيعي مغاير للصفر n بتابع حقيقي من H وليكن $f_n(x)$ فإنه يتم الحصول على متتالية التوابع الحقيقية(أو متتالية الدوال الحقيقية) المعرفة على I الآتية:

$$f_1(x)\ , f_2(x), \dots , f_n(x), \dots$$

والتي حدها الأول هو تابع $f_1(x)$ وحدها الثاني هو $f_2(x)$ وحدها العام (أو الحد النوني) هو التابع $f_n(x)$

تعريف: نقول عن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ إنها متقاربة $\forall x \in I$ و $n \in \mathbb{N}$

إذا وفقط إذا كانت متقاربة كمتتالية عددية من أجل جميع قيم x من المجال Iونكتب:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

حيث يقال عن التابع $f(x)$ إنه تابع النهاية للمتتالية $\{f_n(x)\}$ المدروسة أو أنه التابع الحدي للمتتالية المدروسة أو أنه نهاية المتتالية ويقال حينئذٍ أن متتالية التوابع المدروسة متقاربة (نقطياً) على I من هذا التابع $f(x)$

ملاحظة: قد يحدث أن تتقارب متتالية التوابع من أجل بعض النقاط من مجموعة تعريفها وتتباعد من أجل البعض الآخر

تعريف: نقول عن المتتالية $\{f_n(x)\}$ إنها متباعدة إذا وجدت نقطة x_0 من I تكون عندها المتتالية $\{f_n(x)\}$ متباعدة كمتتالية عددية

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \infty$$

تعريف (تذكرة): نقول عن المتتالية العددية $\{a_n\}$ إنها متقاربة من العدد الحقيقي a إذا وجد لكل $\varepsilon > 0$ عدد $N_0(\varepsilon)$ بحيث يكون: $|a_n - a| < \varepsilon$ من أجل:

$$n \geq N_0(\varepsilon)$$

مثال: لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}$ حيث $f_n(x) = x^n$, $x \in I = [0,1]$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

نجد أن المتتالية متقاربة نقطياً على $[0,1]$ ونجد أن جميع حدود هذه المتتالية

$$x, x^2, x^3 \dots, x^n, \dots$$

هي توابع مستمرة على $I = [0,1]$ أما تابع النهاية هو منقطع أي (غير مستمر عند $x = 1$)

تذكرة: شرط الاستمرار: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

انتهت المحاضرة

إعداد: رنا شوربا – نذير تيناوي