معك نحو

التخرج

Syria Math Team

نظرية الاحتمالات

السنة الثالثة

المحاضرة 9و10و11

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

◄ دكتور المادة: أحمد الغصين

نظري

◄ عنوان المحاضرة: التوزيعات الاحتمالية ◄ المحاضرة: التاسعة

التوزيعات الاحتمالية من النوع المستمر :

1ـ التوزيع المنتظم المستطيلي :

ليكن x متحولاً عشوائياً مستمراً ، يقال عن x أنه يتبع توزيع مستطيلي إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية لها من الشكل : $f(x)=\frac{1}{b-a}$ حيث $b\,,a$ ثوابت والمتحول x يأخذ القيمة بين العددين الثابتين $b\,,a$ بحيث يكون $(b>a)$.

وندعو هذا التوزيع بالتوزيع المستطيلي

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\qquad ;a\le x\le b$$

$b\,,a$ مقادير ثابتة ..

تدعى بمعالم أو وسطاء التوزيع .

والكثير من الأحيان تكون $b=1\,,a=0$ أي أن :

$$f(x)=1 \qquad \Leftarrow \qquad 0\le x\le 1$$

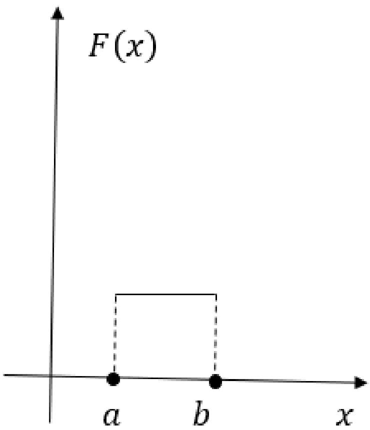
دالة التوزيع التراكمية :

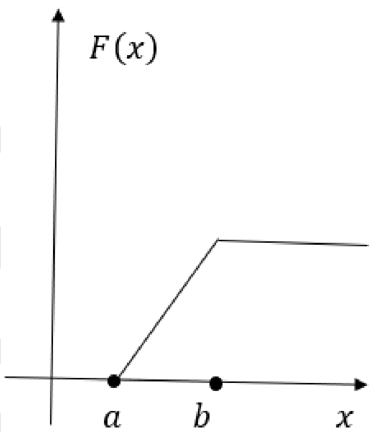
$$F(X)=p(X\le x)=\int_a^x f(s)ds$$

$$F(X)=p(X\le x)=\int_a^x f(s)ds=\int_a^x \frac{dx}{b-a}$$

$$F(X) = \int_a^x f(s)ds \;\; = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

الشكل التالي يبين دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمية للتوزيع المنتظم





صفات هذا التوزيع :

1– التوقع الرياضي :

$$\mu = E(X) = \int xf(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2\,(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mu = E(X) = \frac{a+b}{2}$$

2ـ التباين :

$$V(x) = \sigma_x{}^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$E(x^2) = \int_a^b xf(x)\,dx$$

$$= \int_a^b x\ \frac{x}{b-a}\ dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\ dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\ [(\frac{x^3}{3})]_a^b$$

$$E(x^2) = \frac{b^3 - a^3}{3b - a} = \frac{(b-a)(\,b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)}$$

$$E(x^2) = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{3}\ (b^2 + ab + a^2) - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

التباين : $\sigma_x{}^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

الانحراف المعياري :

$$\sigma_x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

3ـ دالة توليد العزوم :

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_a^b \frac{e^{tx}}{b-a}\,dx$$

$$= \frac{1}{t(b-a)}\left(e^{tb} - e^{ta}\right)$$

$$M_x(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

سؤال : بفرض x متغير عشوائي يتبع توزيعاً منتظماً على الفترة $[a, b]$ حيث

$$\mu = E(X) = 2\sqrt{3}\,\sigma \qquad ; a = 3$$

المطلوب : أوجد : $p(x < 7)$ و $p(x < 6)$

الحل : $E(x) = \mu = \frac{a+b}{2}$

$$\sigma = \frac{b-a}{12}$$

$$\mu = 2\sqrt{3}\,\sigma$$

$$\frac{a+b}{2} = 2\sqrt{3}\,\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{a+b}{2} = b - a$$

$$a + b = 2b - 2a$$

$$a + 2a + b - 2b = 0$$

$$3a - b = 0 \quad ; \; a = 3$$

$$b = 9$$

ومنه تصبح $[3,9] = [a, b]$

- دالة التوزيع التراكمية لهذا الشكل :

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 3 \\ \dfrac{x-3}{6} & 3 \leq x \leq 9 \\ 1 & x > 9 \end{cases}$$

$$\frac{x-a}{b-a}$$

$$p(X < 7) = p(-\infty < X < 7)$$
$$= F(7) - F(-\infty)$$
$$= \frac{4}{6} - 0 = \frac{2}{3}$$

$$p(X < 6) = p\,(-\infty < X < 6)$$
$$= F(6) - F(-\infty)$$
$$= \frac{3}{6} - 0 = \frac{1}{2}$$

^_^

2ـ التوزيع الطبيعي :

نبدأ بحساب التكامل التالي :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mathfrak{z}^2}{2}}\, d\mathfrak{z}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mathfrak{z}^2}{2}}\, d\mathfrak{z} = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\mathfrak{z}^2}{2}}\, d\mathfrak{z}$$

هي دالة زوجية وموجبة ومتناظرة حول النقطة $z = 0$

الآن لنوجد قيمة هذا التكامل :

$$I = \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\mathfrak{z}^2}{2}}\, d\mathfrak{z}$$

نجري تغيراً في المتحول فنفرض :

$$u = \frac{\mathfrak{z}^2}{2} \qquad \Longrightarrow \quad \mathfrak{z}^2 = 2u$$

$$\mathfrak{z} = \sqrt{2u}$$

ومنه : $d\mathfrak{z} = \frac{du}{\sqrt{2u}}$

$$I = 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\mathfrak{z}^2}{2}}\ d\mathfrak{z}$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2u}}\, e^{-u}\, du$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{2}-1}\, e^{-u}\, du$$

$$= \sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}$$

ومنه يكون :

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mathfrak{z}^2}{2}}\ d\mathfrak{z} = 1$$

إذا أجرينا الآن تغيراً بحيث :

$$\mathfrak{z} = \frac{x-a}{b}$$

أياً كان $b > 0$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}\ dx$$

$$F(X) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} dx \ = 1$$

فهي تصلح أن تكون دالة الكثافة الاحتمالية لمتحول عشوائي مستمر مثل X.

تعريف : يقال عن متحول عشوائي مستمر X أنه يتبع توزيعاً طبيعياً بوسطاء $a\ ,b^2$

(وسطاء عددية و $b > 0$) ونكتبها بالشكل $(\ a\ ,b^2)$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية هي :

$$* \quad f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} \qquad ;\ -\infty \le x \le +\infty$$

والتي يمكن كتابتها بالشكل :

$$* \quad f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\ e \times p\left[\frac{-(x-a)^2}{2b^2}\right]$$

$$-\infty \le x \le +\infty$$

وأيضاً تكتب دالته الاحتمالية :

إما : $$* \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{\mathfrak{z}^2}{2}}$$

أو : $$* \quad f(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$$

((دالة كل من الدوال الاحتمالية ودالة الكثافة الاحتمالية السابقة التي سبقت بـ * هامين جداً)) ^_^

صفات هذا التوزيع :

1ـ التوقع الرياضي :

$$\mu = E(x) = a$$

$$E(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)}\ dx$$

بفرض أن : $t = \frac{x-a}{b}$

$$x = bt + a \qquad : dx = b\ dt$$

$$E(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\ bt + a)e^{-\frac{1}{2}t^2}\ \ b\ dt$$

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (bt + a) e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} b\, t\, e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt}_{=0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} a\, e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt}_{=a}]$$

2ـ التباين :

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$$

التباين $\sigma^2 = b^2 = V(x)$

الانحراف المعياري $\sigma = b$

نستطيع كتابة دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي على الشكل التالي :

$$f_x(x) = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)}$$

هذه الكتابة العادية $((X \sim N(\mu, \sigma^2)))$

ويكتب التوزيع الطبيعي المعياري أو القياسي ونعبر عنه بالشكل :

$$Z \sim N(0,1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}$$

3ـ دالة التوزيع التراكمية :

$$F(X) = p\,(X \le x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-a}{b}\right)^2}\, ds$$

4ـ دالة توليد العزوم :

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}\, dx$$

قيمة دالة العزوم عندما نعوض بكل ما يساوي في الحالة الأولى :

$$M_x(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{b^2} - \frac{2ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^2})}\, dx$$

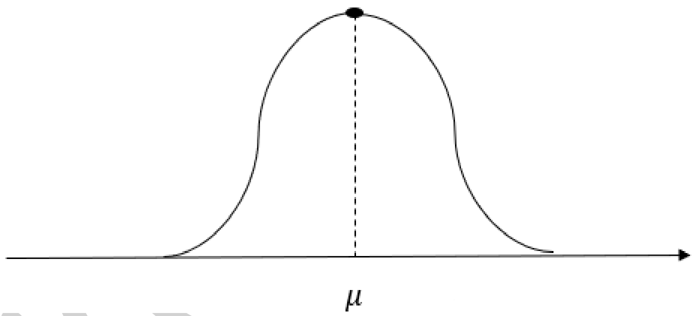
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x\,(\frac{x-2a}{b^2}-2t)}\, dx$$

$$M_x(t) = e \times p\, [\, \mu t + \frac{t^2\, \sigma^2}{2}]$$

$$M_x(t) = e^{\mu t} + \frac{t^2\, \sigma^2}{2}$$

العزوم من المرتبة الفردية $\mu_{2r+1} = 0$ تساوي الصفر .

هذه الدالة هي دالة تناظرية و خطها البياني متناظر بالنسبة للخط البياني للتوزيع الطبيعي .



2019-10-24

نظري

◄ دكتور المادة: أحمد الغصين

◄ المحاضرة: العاشرة ◄ عنوان المحاضرة: التوزيعات الاحتمالية

مبرهنة :

إذا كان x يتبع توزيعاً طبيعياً $x \sim N(\mu \,, \sigma^2)$

وكانت $y = ax + b$ فإن : $y \sim N(a\mu + b \,, a^2\sigma^2)$

بمعنى أن أي دالة خطية في متحول عشوائي يتبع توزيعاً طبيعياً تتبع هي الأخرى توزيعاً طبيعياً .

البرهان :

بما أن $x \sim N(\mu \,, \sigma^2)$ فإن دالة توليد العزوم له هي :

$$M_x(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

لنوجد دالة توليد العزوم للمتحول العشوائي y إن :

$$M(t) = E(e^{ty}) = E\left(e^{t(ax+b)}\right)$$

$$= e^{tb} E(e^{tax}) = e^{tb} M_x(at)$$

ومنه نجد :

$$M_y(t) = e^{tb} M_x(at) = e^{tb}\, e^{\mu at + \frac{1}{2}\sigma^2 at^2}$$

$$= e^{a\mu + b + \frac{1}{2}a^2\sigma^2 t}$$

ومنه دالة توليد العزوم لمتحول عشوائي يتبع توزيعاً طبيعياً وسطه $a\,\mu + b$ وتباينه $a^2\sigma^2$

مبرهنة :

إذا كان $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ وكانت $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

فإن : $Z \sim N(0, 1)$

البرهان :

بما أن $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ فيمكننا أن نكتب : $Z = \frac{1}{\sigma}x - \frac{\mu}{\sigma}$

وبتعويض $a = \frac{1}{\sigma}$, $b = -\frac{\mu}{\sigma}$ وفي المبرهنة السابقة نحصل على :

$$M_Z(t) = e^{\left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right)t + \frac{\sigma^2}{2\sigma^2}t^2} = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

وهذه دالة توليد العزوم لمتحول عشوائي يتبع توزيعاً طبيعياً معيارياً .

مثال :

كم يجب أن يكون ارتفاع الأبواب في منزل يقوم بتصميمه مهندس بحيث لا يضطر أكثر من 0.02 من الأشخاص من تخفيض رؤوسهم وإذا علمت أن الأطوال الأشخاص التوزيع الطبيعي بمتوسط $178\ cm$ وتباين قدره $25\ cm$

الحل :

إذا دل x على طول الأشخاص فإن $x \sim N(178, 25)$ وبفرض x ارتفاع الباب عندئذٍ

$$p(X > x) \leq 0.02$$

$$p\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{x-178}{5}\right) \leq 0.02$$

$$p\left(z > \frac{x-178}{5}\right) \leq 0.02$$

$$1 - p\left(z \leq \frac{x-178}{5}\right) \leq 0.02$$

$$p\left(z \leq \frac{x-178}{5}\right) \geq 0.98$$

$$\Phi\left(\frac{x-178}{5}\right) \geq \Phi(2.06)$$

بالمطابقة :

$$\frac{x-178}{5} \geq 2.06$$

$$\Rightarrow x-178 \geq 10.30$$

$$x \geq 188.30\ cm$$

التوزيع الأسي :

يقال عن المتحول العشوائي المستمر x يتبع توزيعاً أسياً بوسيط λ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية لهذا الشكل :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & ; \lambda > 0 \ \ and \ \ x \geq 0 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

واضح هنا أن هذه الدالة هي موجبة

$$\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\ dx = \left[-e^{-\lambda x}\ \right]_0^{\infty} = 1 \quad ; \quad f(x) > 0$$

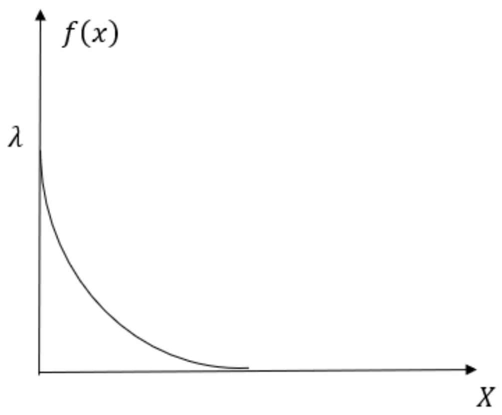
وهذا يؤكد أن $f(x)$ دالة كثافته احتمالية يستخدم هذا التوزيع لوصف كثير من الظواهر ((مثل : الزمن اللازم حتى تتعطل بعض الأنظمة الكهربائية ....))

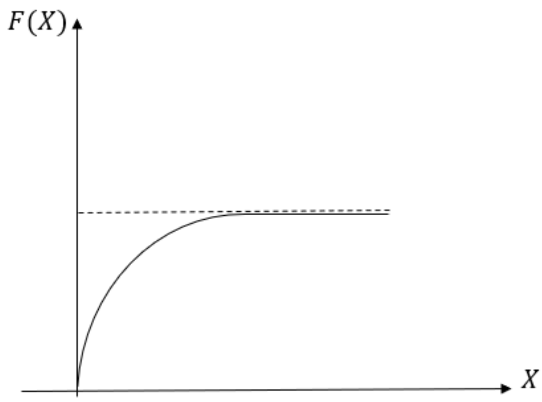
دالة التوزيع التراكمية له هي :

$$F(X) = p(X \leq x) = \lambda \int_0^{x} e^{-\lambda s}\ ds = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

وخطهما البيانيين :





صفات هذا التوزيع :

1– إن متوسط هذا التوزيع : $\mu = \frac{1}{\lambda}$

2– تباين هذا التوزيع :

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

3– الدالة المولدة العزوم :

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{tx}\, e^{-\lambda x}\ dx$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{-x(\lambda - t)}\ dx$$

$$M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{-1}$$

تمرين :

بفرض x متغير عشوائي يتبع توزيع أسي بوسيط λ حيث : $2E(X) = V(X)$

المطلوب : ـ أوجد $p(2 < x < 4)$

الحل :

لدينا :

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda} \Leftarrow \begin{cases} E(x) = \frac{1}{\lambda} \\ V(x) = \frac{1}{\lambda^2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

ـ كذلك دالة التوزيع التراكمية تأخذ

$$F(X) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$p(2 < x < 4) = F(4) - F(2)$$

$$= (1 - e^{-2}) - (1 - e^{-1})$$

$$= 0.23$$

تمرين : ليكن x متغيراً عشوائياً له الدالة المولدة للعزوم :

$$M_x(t) = \frac{1}{1 - 3t}$$

المطلوب :

1ـ أوجد دالة الكثافة لـِ x

2ـ أوجد $p\left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right)$

الحل :

نلاحظ أن :

$$M_x\,(t) = \frac{1}{1-3t} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-t}$$

وهي الدالة المولدة للعزوم لتوزيع أسي بوسيط $\lambda = \frac{1}{3}$ فتكون دالة الكثافة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\,e^{-\frac{x}{3}} & ;\ x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

ومنه :

$$F(X) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{x}{3}} & ; x \geq 0 \\ 0 & ;\ x\ < 0 \end{cases}$$

$$p\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(1 - e^{-\frac{1}{6}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{1}{12}}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{12}} - e^{-\frac{1}{6}} = \frac{e^{\frac{1}{12}} - 1}{e^{\frac{1}{6}}}$$

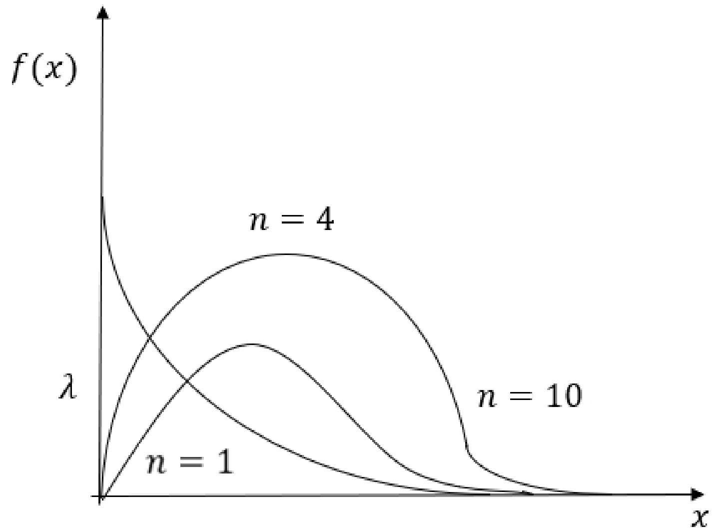
توزيع غاما :

يقال عن متحول عشوائي X بأنه يخضع لتوزيع Γ بوسطاء حقيقية موجبة $\lambda\,,n$

إذا كان لـِ X دالة كثافة احتمالية من الشكل :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\,x^{n-1}\,e^{-\lambda x} & ;\quad \forall x > 0 \\ 0 & ;\ \forall\ x \leq 0 \end{cases}$$

عندما $n = 1$ يؤول هذا التوزيع إلى التوزيع الأسي وخطه البياني من الشكل :



◀ دكتور المادة: أحمد الغصين

نظري

◀ عنوان المحاضرة: التوزيعات الاحتمالية ◀ المحاضرة: الحادية عشر

نكمل **بتوزيع غاما** :

واضح أن $f(x) \geq 0$ وأن تكامل هذه الدالة على مجال تغيرها يساوي الواحد لأن :

$$\int f(x)dx = \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx$$

بوضع $y = \lambda x$ نجد أن $x = \frac{y}{\lambda}$ و $dx = \frac{dy}{\lambda}$

$$y \longrightarrow 0 , \quad x \longrightarrow 0 \quad and \;\; x \longrightarrow \infty \quad , \;\; y \longrightarrow \infty$$

يصبح التكامل :

$$\frac{1}{\Gamma(\mathrm{n})} \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n)} = 1$$

صفات هذا التوزيع :

1ـ متوسط هذا التوزيع : $\mu = E(X) = \frac{n}{\lambda}$

2ـ تباين هذا التوزيع : $\sigma^2 = V(x) = \frac{n}{\lambda^2}$

3ـ دالة توليد العزوم :

$$M(t) = E(e^{tx})$$

$$= \int_0^\infty \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} e^{tx} dx$$

$$M(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - h}\right)^n = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^n$$

4ـ دالة التوزيع التراكمية :

$$F(X) = p\,(X \leq x)$$

$$F(X) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^x s^{n-1}\, e^{-\lambda s}\, ds$$

تمرين:

إذا كانت أعمار المصابيح الكهربائية X بالسنين تتبع التوزيع الاحتمالي التالي :

$$f(x) = c\,x\,e^{-2x} \quad ; \quad x \geq 0$$

حيث c مقدار ثابت .

المطلوب :

1 ـ أوجد قيمة c .

2ـ إذا اخترنا عشوائياً مصباحاً من هذا الإنتاج فما احتمال أن يعيش أقل من 3 شهور ؟

3 ـ أوجد المنوال ـ المتوسط ـ التباين ؟؟

الحل :

1ـ واضح أن x يتبع توزيع غاما بمعالم $\lambda = 2 \quad , \quad n = 2$ وبناءً على ذلك فإن :

$$\mathrm{c} = \frac{\lambda^2}{\Gamma(n)} = \frac{2^2}{\Gamma(2)} = 4$$

2ـ كما أن 3 شهور يعني سنة $\frac{1}{4} = 0.25$ سنة

$$p\,(\,X\ \le\ 0.25\,) = 4\ \int_0^{0.25} x\,e^{-2x}\,dx$$

$$= [\,-2\,x\,e^{-2x} - e^{-2x}\,]_0^{0.25} = 0.09$$

3- القيمة المنوالية : $x_0 = \frac{n-1}{\lambda} = \frac{1}{2}$

متوسط التوزيع : $\mu = \frac{n}{\lambda} = 1$

تباين التوزيع : ${\sigma_x}^2 = \frac{n}{\lambda^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

توزيع مربع كاي :

تعريف : إذا كان X متحولاً عشوائياً له توزيع من النوع المستمر ، دالة كثافته الاحتمالية هي :

$$f_r(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{r}{2}}\,\Gamma(\frac{r}{2})}\ x^{\frac{r}{2}-1}\,e^{-\frac{x}{2}} & ;\ \forall x > 0 \\ 0 & ; x \le 0 \end{cases}$$

فإنه يقال أن X يتبع توزيع مربع كاي بـ r درجته من الحرية و يرمز له بالرمز ${x_r}^2$. من الواضح أن هذا التوزيع هو حالة خاصة من توزيع غاما فيه :

$$n = \frac{r}{2}\ \ ,\ \ \lambda = \frac{1}{\lambda}$$

واضح أن الدالة $f_r(x)$ هي دالة موجبة أي $f_r(x)\ > 0$ وأن تكاملها على مجال تعريفها يساوي الواحد لأن :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(x)dx = \int_0^{\infty}\ \frac{1}{2^{\frac{r}{2}}\ \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}\ x^{\frac{r}{2}-1}\,e^{-\frac{x}{2}}\ dx$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{r}{2}}\ \Gamma(\frac{r}{2})}\ \int_0^{\infty} x^{\frac{r}{2}-1}\ e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

إذا وضعنا $\frac{x}{2} = y$ يكون $x = 2y$ و $dx = 2dy$ وبالتالي نجد :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_r(x)dx = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \int_0^{\infty} y^r\, e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} = 1$$

الصفات القياسية المميزة لتوزيع x^2 :

1ـ التوقع الرياضي لمتحول عشوائي يتبع توزيع x^2 بـ r درجة من الحرية هو :

$$E(X) = r$$

2ـ التباين : $\sigma^2 = 2r$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{2r}$

3ـ الدالة المولدة للعزوم :

$$M_x(t) = (1-2t)^{-\frac{r}{2}}$$

4ـ دالة التوزيع التراكمية :

$$F(X) = p(X \le x) = \int_0^x \frac{1}{2^{\frac{r}{2}}\, \Gamma(\frac{r}{2})}\, s^{-\frac{r}{2}}\, e^{-\frac{s}{r}}\, ds$$

$$F(X) = \int_0^x \frac{1}{2^{\frac{r}{2}}\, \Gamma(\frac{r}{2})}\, s^{-\frac{r}{2}}\, e^{-\frac{s}{r}}\, ds$$

تمرين (1) :

إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير x هي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\, x\, e^{-\frac{x}{2}} & ; x \ge 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

المطلوب : 1ـ عين نوع التوزيع .

2ـ أوجد متوسط التوزيع وتباينه ودالة توليد عزومه .

الحل :

إن x يتبع توزيع كاي بدرجة حرية $r = 4$ $\qquad \frac{r}{2} = 2 \Rightarrow r = 4$

$$\Gamma\left(\frac{r}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{4}{2}\right) = \Gamma(2) = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{4}{2}}\,\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}\, x^{\frac{4}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

متوسط التوزيع : $\mu = E(X) = r = 4$

تباين التوزيع : ${\sigma_x}^2 = V(X) = 2r = 8$

ـ دالة توليد عزومه :

$$M_x(t) = (1 - 2t)^{-\frac{r}{2}} = (1 - 2t)^{-2}$$

تمرين (2) :

إذا كان متغيراً عشوائياً مستمراً دالة توليد عزومه هي :

$$M_x(t) = (1 - 2t)^{-8}$$

فإن x هي ${X_{16}}^2$ ، التوزيع مربع كاي

التوقع : $\mu = r = 16$

التباين : $\sigma^2 = 2r = 32$

تمرين (3) :

إذا كانت $X_1 , X_2 , \ldots ,X_n$ متحولات عشوائية مستقلة بالتبادل مثنى مثنى وكان X_1 تبع توزيع كاي بدرجة حرية n_1

وكان X_2 يتبع توزيع كاي بدرجة حرية n_2

إذا كانت : y متحول عشوائي آخر وهو عبارة عن $y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

اوجد توزيع y .

الحل :

من المعلوم لدينا :

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = E\left(e^{t}\sum_{i=1}^{n} X_i \right)$$

$$= E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{t}\, X_i \right]$$

وبما أن المتحولات : $X_1 , X_2 , \ldots ,X_n$ مستقلة عن بعضها البعض فإن :

$$E\left[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i} \right] = E\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i} \right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E(e^{tX_i})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} M_x(t)$$

وبما أن $X_{n_i}{}^2 \sim X_i{}^4$ ، فإن $M(t) = [\,1 - 2\,]^{-\frac{n_i}{2}}$

وعليه يكون

$$M(t) = \prod_{i=1}^{n} [\, 1 - 2t \,]^{-\frac{n_i}{2}}$$

$$= [\, 1 - 2t \,]^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{2}}$$

وهذا يعني أن $X \sim X^2$ بـ $\sum_{i=1}^{n} n_i$ درجة حرية .

توزيع بيتا :

تعريف :

يقال عن متحول عشوائي مستمر x أنه يتبع توزيع بيتا بوسطاء $a\,,b$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية من الشكل :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(a,b)}\; x^{a-1}\,(1-x)^{b-1} & ;\; 0 \le x \le 1 \\ 0 & ;\; \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

حيث $a, b > 0$ مقادير ثابتة ويكتب ذلك بالشكل $\beta(a, b\,)$ x ▯

المنوال : نعلم أن المنوال يناظر قيمة منحني الدالة $f(x)$ فيكون هو قيمة x التي تجعل $f\,`(x) = 0$ أي :

$$f\,`(x) = \frac{x^{a-1}\,(1-x)^{b-2}}{\beta(a,b)}\,[\,(a-1) - x\,(\,a+b-2)\,]$$

$$f\,`(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = \frac{a-1}{a+b-2}$$

ونلاحظ أن $x_0 = \frac{1}{2}$ وكان $a = b$

ملاحظة : دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع $\beta\,(a,b)$ يمكن أن تأخذ الصيغة التالية :

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\; x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}$$

صفات هذا التوزيع :

1- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \mu = \frac{a}{a+b}$$

2- التباين :

$$\sigma^2 = V(x) = \frac{ab}{(a+b+1)\,(a+b)^2}$$

3- دالة التوزيع التراكمية :

$$F\,(X) = P\,(\,X\ \leq x\,) = \int_0^x \frac{1}{\beta(\,a\,,b\,)}\, s^{a-1}\,(\,1-s\,)^{b-1}\,ds$$

إن هذا التوزيع تشكيله العام غير متناظر وعندما يكون $a = b$ عندئذٍ يكون متناظر .

4- دالة توليد العزوم :

$$M\,(t) = E\,(e^{tx}) = \int_0^1 e^{tx}\,\frac{1}{\beta(a\,,b)}\ x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,dx$$

إن هذه الدالة من إحدى الدوال التي من الصعب إيجاد قيمة لها وبالتالي نحسب هذه الدالة بقيم محددة :

$$\alpha = E(X^r) = \frac{\Gamma(a+b).\Gamma(b)}{\Gamma(a).\Gamma(\,a+b+r)}$$

تمرين :

إذا كان X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية هي : $f(x) = cx^2(1-x)$

$$\forall\, 0\ \leq x\ \leq 1$$

المطلوب :

1- أوجد قيمة c

2- احسب $p\,(\,X \leq 0.6\,)$

3- أوجد المنوال ـ متوسط التوزيع ـ تباين التوزيع .

الحل :

-1

$$c = \frac{1}{\beta(3,2)} = 12$$

-2

$$p(X \leq 0.6) = 12 \int_0^{0.6} x^2 \, (1 - x)dx$$

$$= [\, 4x^3 - 3x^4 \,]_0^{0.6} = 0.475$$

3- المنوال :

$$x_0 = \frac{a-1}{a+b-2} = \frac{2}{3}$$

المتوسط :

$$\mu = \frac{a}{a+b} = \frac{3}{5}$$

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{a.b}{(a+b+1)(a+b)^2}$$

$$= \frac{3(2)}{6\,(5)^2} = \frac{1}{25}$$

انتهت المحاضرة الحادية عشرة ..