معك نحو

السخر

Syria Math Team

السنة الثالثة

نظرية الاحتمالات

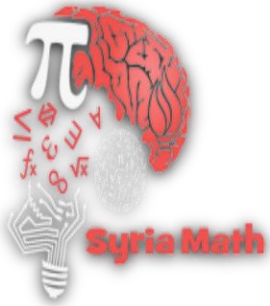
المحاضرة 13

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل:

هاتف – واتساب: 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 3rd year



◄ دكتور المادة: أحمد الغصين

◄ المحاضرة: الثانية عشر

◄ عنوان المحاضرة: الأشعة العشوائية

الفصل الثالث :

الأشعة العشوائية والمتحولات العشوائية الثنائية :

تعريف : الشعاع العشوائي في متحولين x , y هو عبارة عن دالة معرفة على فضاء العينة s ويأخذ قيمته في $\mathbb{R}^2$

ندرس في هذا الفصل المتحولات العشوائية المنقطعة في المتحولين :

Xمنقطع و Y منقطع ، X مستمر و Y مستمر .

إذا كان x متحول عشوائي منقطع :

$$X : x_1 , x_2 , .. , x_n$$

$$Y : y_1, y_2, .. , y_n$$

فإن الدالة الاحتمالية المشتركة للمتحولين Y , X نرمز لها $f(X , Y)$

إن هذه الدالة تحقق جميع شروط الدوال الاحتمالية :

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\sum f(x, y) = 1$$

التوزيعات الثنائية المنقطعة :

ليكن X , Y متحولين عشوائيين من النوع المنقطع على نفس فضاء العينة s حيث :

$$X(s) = R_X = \{ x_1 , x_2 , .. , x_n \}$$

Syria Math Team

$$Y(s) = R_y = \{ y_1, y_2, .., y_n \}$$

فإنه يمكن أن نأخذ مجموعة حاصل جداء :

$$X(s).Y(s) = \{ (x_1, y_1), (x_2, y_2), .., (x_n, y_n) \}$$

إن هذه الدالة الاحتمالية المشتركة لهذا المتحول ونرمز لها بـ $f(x,y)$

وتساوي بالتعريف : $f(x,y) = p(X = x, Y = y)$

ويمكن أن نشكل جدولاً نضع قيمة X, Y فيها :

	X_1	X_2	....	X_n	المجموع
Y_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_2, y_1)$	....	$f(x_n, y_1)$	$f(y_1)$
Y_2	$f(x_1, y_2)$	$f(x_2, y_2)$	....	$f(x_n, y_2)$	$f(y_2)$
....	....	....	....	....	....

جدول التوزيعات المشتركة للمتحولين العشوائيين X, Y .

ونستطيع أن نعرف الدالة $f_X(x_i)$ بالشكل :

$$f_X(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)$$

بحيث تسمى الدالة $f_X(x_i)$ دالة احتمالية الهامشية للمتحول X

يمكن أن نضع الدالة الاحتمالية المشتركة على شكل جدول وبالتالي يمكن أن نجمع عناصر هذا الجدول سطراً أو نجمعها رأسياً ، في هذه الحالة نحصل على الدوال الهاشمية لكل من المتحولين : X, Y

$$f(x,y) = p(X = x, Y = y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_i)$$

Syria Math Team

$$F(X,Y)=p(X\le x\,,Y\le y)=\sum_{X\le x_i}\sum_{Y\le y_i}f(x_i\,,y_i)$$

مثال :

ألقيت قطعتين نرد مرة واحدة ، فإذا كانت X هي مجموع النقط التي تظهر على السطح العلوي للقطعتين ، Y أكبر الأعداد (النقاط) التي تظهر على السطح العلوي للقطعتين

أوجد الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين : $X\,,Y$

الحل :

فضاء العينة :

$$s=\{\,(i,j);i=j=1,2,3,4,5,6\,\}$$

$$X=(i+j)=2,3,4,\dots,12$$

$$Y=\max(i,j)=1,2,3,4,5,6$$

يمكن حساب احتمالات القيم المختلفة للمتغير بين $X\,,Y$ على النحو التالي :

$$f(2,1)=p(X=2,Y=1)=p\,[\,(1,1)\,]=\frac{1}{36}$$

$$f(2,2)=p(X=2,Y=2)=p\,[\,\Phi\,]=0$$

$$f(4,1)=p(X=4,Y=1)=p\,[\,\Phi\,]=0$$

$$f(4,2)=p(X=4,Y=2)=p\,[\,(2,2)\,]=\frac{1}{36}$$

$$f(4,3)=p(X=4,Y=3)=p\,[\,(1,3)\,,(3,1)\,]=\frac{2}{36}$$

$$f(4,4)=p(X=4,Y=4)=p\,[\,\Phi\,]=0$$

وهكذا ..

	1	2	3	4	5	6	$f(x)$

Syria Math Team

2	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
3	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$
4	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\frac{3}{36}$
5	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{4}{36}$
6	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{5}{36}$
7	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$
8	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$
9	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$
10	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
11	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
12	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

نلاحظ مثلاً :

$$f(5,4) = \frac{2}{36}$$

$$f(7,3) = 0$$

$$f(10,5) = \frac{1}{36}$$

وكذلك فإن :

$$F(4,3) = p(X \leq 4\,, Y \leq 3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Syria Math Team

$$p(6 \le X \le 8\ ,4 \le Y \le 6) = \frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}+\frac{2}{36}=\frac{11}{36}$$

مثال :

إذا كانت الدالة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين X,Y هي :

$$f(x,y) = q^2\ ,p^{y-2}$$

حيث :

$$x = 1,2,..,y-1$$

$$y = 2,3,4,..$$

$$0 \le p \le 1 \qquad ,q = 1-p$$

1ـ تأكد من أن $f(x,y)$ دالة احتمالية

2ـ ما قيمة $f(2,4)$ وقيمة $F(2,4)$

الحل :

1ـنلاحظ أن $f(x,y) \ge 0$ من أجل جميع قيم $x\ ,y$

2ـ من حدود المتغيرين نلاحظ أن x تبدأ من 1 و y تبدأ من $x+1$ وعلى ذلك فإن :

$$\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=x+1}^{\infty} f(x,y) = q^2\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{y=x+1}^{\infty} p^{y-2}$$

$$= q^2\sum_{x=1}^{\infty}(\,p^{x-1}+p^{x}+p^{x+1}\,..)$$

$$= q\sum_{x=1}^{\infty} p^{x-1}\,.\ q\frac{1}{1-p} = 1$$

إذا الدالة $f(x,y)$ دالة احتمالية

Syria Math Team

$$f(2,4) = q^2p^2$$

$$F(x,y) = p(\ X \le x\ ,Y\ \le y\ )$$

$$= \sum_{t=1}^{x}\sum_{s=x+1}^{y} q^2\ p^{y-2}$$

$$F(2,4) = \sum_{x=1}^{2}\sum_{y=x+1}^{4} q^2\ p^{y-2}$$

$$= q^2\ (\ 1 + 2p + 2p^2)$$

انتهت المحاضرة الثالثة عشرة ..

Syria Math Team