معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

البنى الجبرية1

المحاضرة 13

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

◄ دكتور المادة: فادي أبو حرب

◄ المحاضرة: الثالثة عشر ◄ عنوان المحاضرة: المرافقات

تمهيدية (بدون برهان):

لتكن $n > 1$ عدداً صحيحاً و k قاسماً موجباً للعدد n ان المجموعة

$$U_k(n) = \{k: k \in U(n)\ ; x = 1 mod\ k\}$$

زمرة جزئية من الزمرة $U(n)$

مثال:

من اجل $n = 21$ و $k = 3$ اوجد كلاً من $U(21)$ ثم $U_3(21)$

الحل:

$$U(21) = \{1,2,4,5,8,10,11,13,16,17,19,20\}$$

$$U_3(21) = \{1,4,10,13,16,19\}$$

وظيفة كتابة جدول المقاس 21

اثبت من خلال الجدول ان $U_3(21)$ زمرة جزئية من $U(21)$

المرافقات والدليل ومبرهنة لاغرانج:

ليكن G زمرة, H زمرة جزئية من G

تعريف: ليكن $a, b \in G$ عندئذٍ نسمي المجموعة $a, H = \{a.h\ :\ h \in H\}$

مرافقة يسارية للزمرة الجزئية H في G كما نسمي المجموعة:

$$H.b = \{h.b\ ; h \in H\}$$

مرافقة يمينية للزمرة الجزئية H في G

مثال:

في الزمرة $(Z_9 , \oplus)$ اكتب عناصر Z_9 , وهل $H = \{0,3,6\}$ تشكل زمرة جزئية من Z_9

ثم اوجد جميع المرافقات اليسارية ل H في Z_9

الحل:

$$Z_9 = \{0,1,2,3, \dots .8\}$$

$$H = \{0,3,6\}$$

$mod\ 9$	0	3	6
0	0	3	6
3	3	6	0
6	6	0	3

نلاحظ من خلال الجدول انه اياً كان $a, b \in H$ فإن $a \oplus b \in H$ ومنه H زمرة جزئية من Z_9

المرافقات اليسارية:

$$0 \oplus H = \{0,3,6\} = 3 \oplus H = 6 \oplus H$$

$$1 \oplus H = \{1,4,7\} = 4 \oplus H = 7 \oplus H$$

$$2 \oplus H = \{2,5,8\} = 5 \oplus H = 8 \oplus H$$

$$3 \oplus H = \{3,6,0\}$$

$$4 \oplus H = \{4,7,1\}$$

الترتيب غير مهم.

ومنه المرافقات اليسارية للزمرة H في Z_9 هي $\{0 \oplus H , 1 \oplus H , 2 \oplus H\}$

مبرهنة:

لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G وليكن $a, b \in G$ القضايا التالية صحيحة:

1) $a \in aH$
2) $aH = H$ عندما وفقط عندما $a \in H$
3) اما $aH = bH$ او $aH \cap bH = \emptyset$
4) $aH = bH$ عندما وفقط عندما $a^1 . b \in H$
5) $card\ aH = card\ bH = card\ H$
6) aH زمرة جزئية من G عندما وفقط عندما $a \in H$
7) بفرض ان $M_l = \{aH\ ; a \in G\}$ مرافقات يسارية

$M_r = \{Ha\ ; a \in G\}$ مرافقات يمينية

عندئذٍ: $card\ M_l = card\ M_r$

8) كل من M_r , M_l تشكل تجزئة للزمرة G

9) $aH = bH$ عندما وفقط عندما $H = aHb^{-1}$

البرهان:

1- $a = ae \in aH$

2- لنفرض ان $aH = H$ عندئذٍ أياً كان $h \in H$ يوجد $h_1 \in H$ بحيث $h = ah_1$ ومنه $a =$ $h.h_1^{-1} \in H$ وبالتالي $a \in H$

لنفرض ان $a \in H$ عندئذٍ $aH \subseteq HH = H$ من جهة أخرى ,أياً كان $h \in H$ فإن : $h = a(a^{-1}) \in$ aH

أي ان $H \subseteq aH$ ومنه $aH = H$

3- اذا كان $aH \cap bH = \emptyset$ يتم المطلوب. لنفرض ان $aH \cap bH \neq \emptyset$ عندئذٍ يوجد $x \in aH \cap$ bH وبالتالي فإن $x = ah_1 = ah_2$ حيث $h_1, h_2 \in H$ و هكذا فإن $a = bh_2h_1^{-1}$ وحسب (2) نجد ان $aH = b(h_2h_1^{-1})H = bH$

4- ينتج مباشرة من الخاصة 2

5- لنعرف العلاقة $f: aH \longrightarrow bH$ بالشكل التالي: أياً كان $h \in H$ فإن $f(ah) = bh$ فنجد ان f تقابلاً لانه أياً كان $h_1, h_2 \in H$ فإن:

$$ah_1 = ah_2 \Leftrightarrow h_1 = h_2 \Leftrightarrow bh_1 = bh_2 \Leftrightarrow f(ah_1) = f(ah_2)$$

ليكن $y \in bH$ عندئذٍ يوجد $h \in H$ بحيث $y = bh$ وبما ان $ah \in aH$ فإن $f(ah) = bh = y$ مما سبق نجد ان f تقابلاً وبالتالي $card\ aH = card\ bH$ وبما ان $e \in H$ فإن $eH = H$ وبالتالي :

$$card\ aH = card\ bH = card\ H$$

6- لنفرض ان aH زمرة جزئية من G عندئذٍ $e \in aH$ وبما ان $e \in eH$ نجد ان $aH \cap eH \neq \emptyset$ وحسب (3)

نستنتج ان $aH = eH = H$

لنفرض ان $a \in H$ عندئذٍ حسب (2) فإن $aH = H$ وبالتالي aH زمرة جزئية من G

7- وظيفة.

8- ان العلاقة : $\varphi: M_r \longrightarrow M_l$ المعرفة بالشكل : أياً كان $Ha \in M_r$ فإن $\varphi(Ha) = a^{-1}H$ تشكل تقابلاً ,لانه أياً كان $Ha, Hb \in M_r$ فإن: $Ha = Hb \Leftrightarrow H = aHa^{-1} \Leftrightarrow ba^{-1} \in$ $H \Leftrightarrow ba^{-1}H = H \Leftrightarrow a^{-1}H = b^{-1}H \Leftrightarrow \varphi(Ha) = \varphi(Hb)$

ليكن $bH \in M_l$ عندئذٍ $b^{-1} \in G$ ومنه $Hb^{-1} \in M_r$ وان $\varphi(Hb^{-1}) = (b^{-1})^{-1}H = bH$

9- ينتج مباشرة من الخاصتين 1 و 3 ومن ان $G = \bigcup_{a\in G} aH$

تعريف: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G نسمي $card\ M_l$ دليل H في G ونرمز له بالرمز $(G : H)$

وحسب المبرهنة السابقة: $(G : H) = card\ M_l = card\ M_r$

- كما نسمي $card\ G$ بمرتبة الزمرة G ونرمز لها بالرمز $(G : 1)$

مثال:

$$(U_3(21) : 1) = 6$$

$$(Z_9 : 1) = 9$$

$$(U(21) : 1) = 12$$

مبرهنة لاغرانج : لتكن G زمرة منتهية و H زمرة جزئية من G عندئذٍ:

$$(G : 1) = (G : H)\,(H : 1)$$

انتهت المحاضرة

إعداد: وئام النمر, ولاء الأخضر, أبرار الخالد