

معك نحو
التفخر

Syria Math Team



السنة الثالثة

البنى الجبرية 3
المحاضرة 9



تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية - جانب بناء الفيحاء

للتواصل:

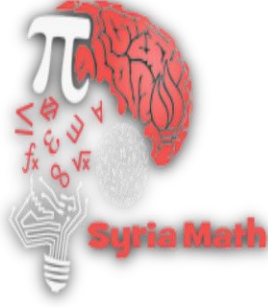
هاتف - واتساب: 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

◀ دكتور الملاءة: بشام الحسين

◀ المحاضرة : التاسعة

◀ عنوان المحاضرة: الجداء المرافق



المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

• الفصل الرابع

1- الجداء والجداء المرافق

الجداء الديكارتي : ليكن $(M_i)_{i \in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R ولتكن المجموعة

$$\prod M_i = \{(m_i)_{i \in I}; m_i \in M_i\}$$

تمثل الجداء الديكارتي للأسرة $(M_i)_{i \in I}$ ونزود هذه المجموعة $(\prod M_i)_{i \in I}$ بقانوني تشكيل :

أحدهما (+) معرف كما يلي :

$$(m_i)_{i \in I} + (m'_i)_{i \in I} = (m_i + m'_i)_{i \in I}$$

والآخر (.) بمقدار $\alpha \in R$ معرف كما يلي :

$$\alpha(m_i)_{i \in I} = (\alpha m_i)_{i \in I}$$

ويسمى مودول الجداء الديكارتي

مثال : من أجل $j \in I$ لنأخذ العلاقة

$$P_{rj} : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$$

$$i \neq j \quad P_{rj}(m_i)_{i \in I} = m_j$$

حيث P_{rj} تشاكل مودولي يسمى الإسقاط القانوني

تعريف جداء أسرة مودولات : لتكن $(M_i)_{i \in I}$ أسرة من المودولات على حلقة R نعرف جداء هذه الأسرة

على أنه الزوج

$$(P, (f_i)_{i \in I})$$

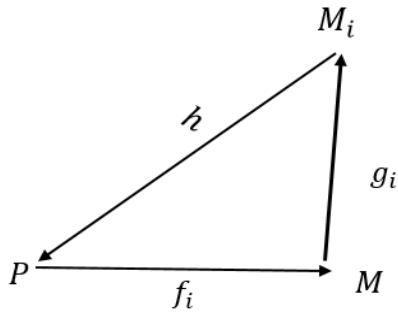
حيث P مودول على R وحيث $(f_i: P \rightarrow M_i)_{i \in I}$ أسرة تشاكل مودولية تحقق ما يلي :
من أجل أي مودولي M على R وأي أسرة تشاكلات مودولية:

$$(g_i: M \rightarrow M_i)_{i \in I}$$

يوجد تشاكل مودولي وحيد :

$$h: M \rightarrow P$$

تجعل المخطط التالي تبديلياً



$$f_i \circ h = g_i \quad \forall i \in I : \text{ بحيث}$$

ملاحظة: إذا كانت $(M_i)_{i \in I}$ أسرة من المودولات فوق الحلقة R وكانت

$$(P, (f_i)_{i \in I})$$

جاء الأسرة $(M_i)_{i \in I}$ فإن التشاكل $(f_i)_{i \in I}$ غامر

لأن :

بما أن

$$(P, (f_i)_{i \in I})$$

جاء ل $(M_i)_{i \in I}$ فإنه من أجل أي مودول M وأي أسرة تشاكلات

$$(g_i: M \rightarrow M_i)_{i \in I}$$

يوجد تشاكل وحيد

$$h: M \rightarrow P$$

يجعل المخطط تبادلي ويحقق $f_i \circ h = g_i$ ولناخذ $i = j: M = M_i$

$$\Rightarrow g_i: M_j \rightarrow M_j$$

$$\Rightarrow f_i o h = I_{M_j} \quad : \quad g_i = \begin{cases} I_{M_i} \\ g_j = 0 \quad i \neq j \end{cases}$$

ومنه h قابل للاختصار من اليسار و $\Leftarrow f_i$ غامر

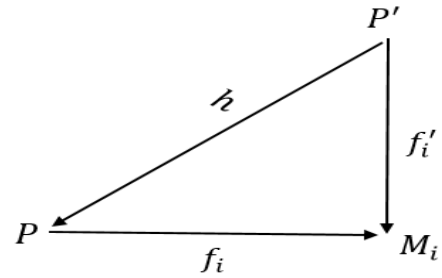
مبرهنة: إذا كان $(P, (f_i)_{i \in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i \in I}$ على حلقة R فإن القضايا الآتية متكافئة:

- 1- $(P', (f'_i)_{i \in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i \in I}$
- 2- يوجد تماثل مودولي وحيد $h: P' \rightarrow P$ بحيث يحقق $f_i o h = f'_i \quad \forall i \in I$

الإثبات:

(1) \Leftrightarrow (2) بما أن $(P, (f_i)_{i \in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i \in I}$ لذلك من أجل أي مودول P' على R

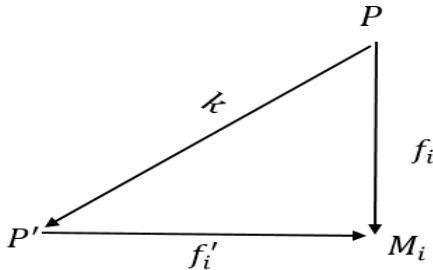
ومن أجل الأسرة (M_i) فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: P' \rightarrow P$ يجعل المخطط:



تبدلياً

أي $f'_i o h = f_i$ (*) وبما أن الزوج (P', f'_i) جداء أيضاً للأسرة ذاتها فإنه من أجل المودول P

والأسرة $(M_i)_{i \in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $k: P \rightarrow P'$ يجعل المقرر التالي تبدلياً:

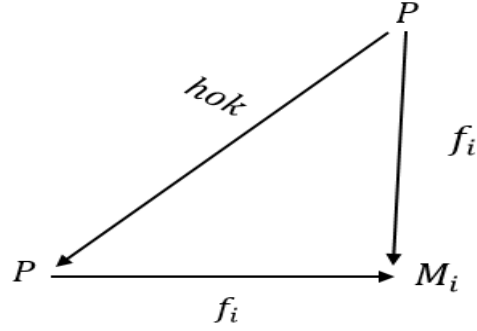


1

أي أن $f'_i o k = f_i$... (**)

من (*) و(**) أصبح لدينا $f'_i o k = f_i$ و $f_i o h = f'_i$

نعوض $(f_i o h) o k = f_i$ أي ان $f_i o (h o k) = f_i$ بذلك يكون المخطط :



تبديلي ولكن نعلم أن $I_P o f_i = f_i$ ولدينا التشاكل الوحيد $h o k$ الذي يجعل المخطط الأخير تبديلي :
 بالمقارنة :

$$h o k = I_P$$

بطريقة مشابهة :

نثبت أن $k o h = I_P$ وبالتالي فإن

h تماثل مودولي ويكون $k = h^{-1}$

(2) \Leftrightarrow (1) لدينا فرضا تماثل مودولي $h: P' \rightarrow P$ بحيث

$f_i o h = f'_i$ وبما أن h^{-1} وبالتالي

$$(f_i o h) o h^{-1} = f'_i o h^{-1}$$

أي $f_i o (h o h^{-1}) = f'_i o h^{-1}$

$$f_i = f'_i o h^{-1}$$

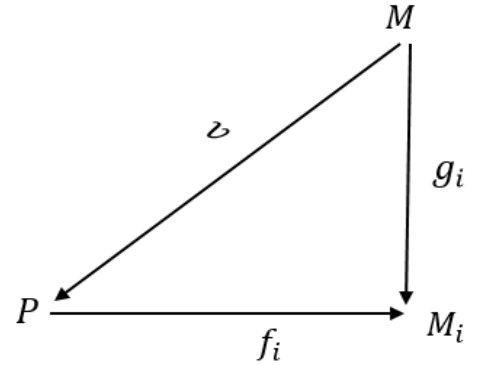
وبما ان $(P, (f_i)_{i \in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i \in I}$

فإنه

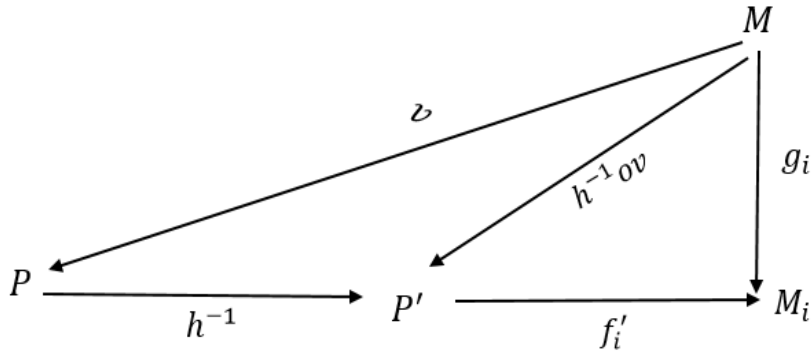
من اجل مودول ما M ومن اجل أسرة التشاكل

$$g_i: M \rightarrow M_i$$

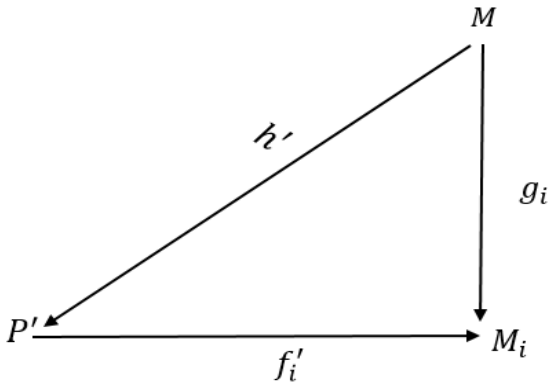
يوجد تشاكل مودولي وحيد $v: M \rightarrow P$ بحيث المخطط :



تبدلياً أي : $f_i \circ v = g_i$ لناخذ من جديد المخطط :



أي يوجد $h' = h^{-1} \circ v: M \rightarrow P'$ والمخطط التالي تبدلياً :



$$f_i' \circ h' = f_i' \circ (h^{-1} \circ v) = g_i \quad \text{أي :}$$

$$g_i = f_i' \circ v \quad \text{ولكن}$$

$$f_i' \circ h' = f_i' \circ (h^{-1} \circ v) = (f_i' \circ h^{-1}) \circ v = f_i' \circ v = g_i$$

وهذا معناه أن $(P', (f_i')_{i \in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i \in I}$

وظيفة : 1- ليكن $p', p \in M_R$ حيث M مودول فوق الحلقة R

أثبت أن $\varphi: p' \rightarrow p + p'/p$ تشاكل مودولي غامر

2 - أثبت أن التطبيق

$$\psi: p + p'/p \rightarrow p'/p \cap p'$$

تمائل

انتهت المحاضرة