معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثالثة

البنى الجبرية 3

المحاضرة 9

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

نظري

◄ دكتور المادة: بشار الحسين

◄ المحاضرة : التاسعة ◄ عنوان المحاضرة: الجداء المرافق

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

- الفصل الرابع

1- الجداء والجداء المرافق

الجداء الديكارتي : ليكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R ولتكن المجموعة

$$\prod M_i = \{(m_i)_{i\in I}; m_i \in M_i\}$$

تمثل الجداء الديكارتي للاسرة $(M_i)_{i\in I}$ ونزود هذه المجموعة $(\prod M_i)_{i\in I}$ بقانوني تشكيل :

أحدهما $(+)$ معرف كما يلي :

$$(m_i)_{i\in I} + (m'_i)_{i\in I} = (m_i + m'_i)_{i\in I}$$

والآخر (.) بمقدار $\alpha \in R$ معرف كما يلي :

$$\alpha(m_i)_{i\in I} = (\alpha m_i)_{i\in I}$$

ويسمى مودول الجداء الديكارتي

مثال : من أجل $j \in I$ لنأخذ العلاقة

$$P_{r_j} : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$$

$$i \neq j \quad P_{r_j}(m_i)_{i\in I} = mj$$

حيث P_{r_j} تشاكل مودولي يسمى الاسقاط القانوني

تعريف جداء أسرة مودولات : لتكن $(M_i)_{i\in I}$ اسرة من المودولات على حلقة R نعرف جداء هذه الأسرة على أنه الزوج

$$(P,(f_i)_{i\in I})$$

حيث P مودول على R وحيث $(f_i: P \to M_i)_{i\in I}$ أسرة تشاكل مودولية تحقق ما يلي :

من أجل أي مودولي M على R وأي أسرة تشاكلات مودولية:

$$(g_i: M \to M_i)_{i\in I}$$

يوجد تشاكل مودولي وحيد :

$$h: M \to P$$

تجعل المخطط التالي تبديلياً

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dl, "h"'] \\ P \arrow[r, "f_i"'] & M \arrow[u, "g_i"'] \end{tikzcd}$$

بحيث : $f_i o h = g_i \ \forall i \in I$

ملاحظة : إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة من المودولات فوق الحلقة R وكانت

$$(P,(f_i)_{i\in I})$$

جداء الأسرة $(M_i)_{i\in I}$ فإن التشاكل $(f_i)_{i\in I}$ غامر

لأن :

بما أن

$$(P,(f_i)_{i\in I})$$

جداء ل $(M_i)_{i\in I}$ فإنه من أجل أي مودول M وأي أسرة تشاكلات

$$(g_i: M \to M_i)_{i\in I}$$

يوجد تشاكل وحيد

$$h: M \to P$$

يجعل المخطط تبادلي ويحقق $f_i o h = g_i$ ولنأخذ $M = M_i$:$i = j$

$$\Rightarrow g_i: M_j \longrightarrow M_j$$

$$\Rightarrow f_i oh = I_{M_j} \quad : \quad g_i = \begin{cases} I_{M_i} \\ g_j = 0 \quad i \neq j \end{cases}$$

ومنه h قابل للاختصار من اليسار و $\Leftarrow$ f_i غامر

مبرهنة: إذا كان $(P, (f_i)_{i\in I})$ جداء للاسرة $(M_i)_{i\in I}$ على حلقة R فإن القضايا الآتية متكافئة :

1- $(P', (f_i')_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

2- يوجد تماثل مودولي وحيد $h: P' \to P$ بحيث يحقق $\forall i \in I \;\; f_i oh = f_i'$

الإثبات :

$(1) \Leftarrow (2)$ بما أن $(P, (f_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ لذلك من اجل أي مودول P' على R

ومن اجل الأسرة (M_i) فإنه يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: P' \to P$ يجعل المخطط :

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f_i'"] \\ P \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

تبديلياً

أي $foh = f_i' \ldots\ldots(*)$ وبما أن الزوج (P', f_i') جداء أيضا للأسرة ذاتها فأنه من أجل المودول P

والأسرة $(M_i)_{i\in I}$ يوجد تشاكل مودولي وحيد $k: P \to P'$ يجعل المقرر التالي تبديليا :

1

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, "f_i"] \\ P' \arrow[r, "f_i'"'] & M_i \end{tikzcd}$$

أي أن $f_i' ok = f_i \ldots\ldots (**)$

من $(*)$و$(**)$ أصبح لدينا $f_i' ok = f_i$ و $f_i oh = f_i'$

$\Leftarrow$نعوض $(f_i oh)ok = f_i$ أي ان $f_i o(hok) = f_i$ بذلك يكون المخطط :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "hok"'] \arrow[d, "f_i"] \\ P \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

تبديلي ولكن نعلم أن : $I_P of_i = f_i$ ولدينا التشاكل الوحيد hok الذي يجعل المخطط الأخير تبديلي :

$\Leftarrow$بالمقارنة :

$$hok = I_P$$

بطريقة مشابها :

نثبت أن $koh = I_P$ وبالتالي فإن

h تماثل مودولي ويكون $k = h^{-1}$

(2) $\Leftarrow$ (1) لدينا فرضا تماثل مودولي $h: P' \to P$ بحيث

$f_i oh = f_i'$ وبما أن h^{-1} وبالتالي

$$(f_i oh)oh^{-1} = f_i' oh^{-1}$$

أي $f_i o(hoh^{-1}) = f_i' oh^{-1}$

$$f_i = f_i' oh^{-1}$$

وبما ان $(P, (f_i)_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

فإنه

من اجل مودول ما M ومن اجل أسرة التشاكل

$$g_i: M \to M_i$$

يوجد تشاكل مودولي وحيد $v: M \to P$ بحيث المخطط :

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "v"'] \arrow[d, "g_i"] \\
P \arrow[r, "f_i"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

تبديليا أي : $f_i o v = g_i$ لنأخذ من جديد المخطط :

$$\begin{tikzcd}
& & M \arrow[dll, "v"'] \arrow[dl, "h^{-1}ov"] \arrow[d, "g_i"] \\
P \arrow[r, "h^{-1}"'] & P' \arrow[r, "f_i'"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

أي يوجد $h' = h^{-1}ov: M \to P'$ والمخطط التالي تبديلي :

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "h'"'] \arrow[d, "g_i"] \\
P' \arrow[r, "f_i'"'] & M_i
\end{tikzcd}$$

أي : $f_i' o h' = f_i' o(h^{-1} o v) = g_i$

ولكن $g_i = f_i o v$

$$f_i' o h' = f_i' o(h^{-1} o v) = (f_i' o h^{-1}) o v = f_i o v = g_i$$

وهذا معناه أن $(P', (f_i')_{i\in I})$ جداء للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

وظيفة : 1- ليكن $p', p \in M_R$ حيث M مودول فوق الحلقة R

أثبت أن $\varphi: p' \to p + p'/p$ تشاكل مودولي غامر

2 - أثبت أن التطبيق

$$\psi: p + p'/p \to p'/p \cap p'$$

تماثل

انتهت المحاضرة