

معك نحو
التفخر

Syria Math Team



السنة الثالثة

البنى الجبرية 3
المحاضرة 11

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية - جانب بناء الفيحاء

للتواصل:

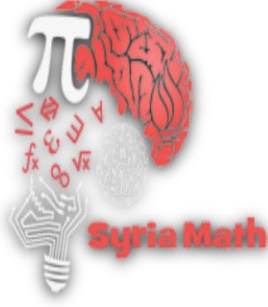
هاتف - واتساب: 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023



◀ دكتور الملائكة: بشام الحسين

◀ المحاضرة: الحادية عشر



المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- مبرهنات

2- المتتاليات المنشطرة

3-

مبرهنة: إذا كانت $(M_i)_{i \in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R فإن $(in_j)_{i \in I}$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i \in I}$

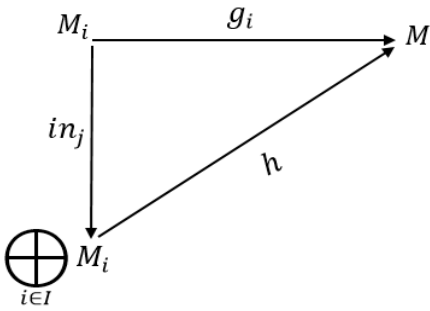
الإثبات :

ليكن M مودولا على حلقة R ولتكن $(g_i: M_i \rightarrow M)_{i \in I}$ أسرة تشاكلات مودولية ولناخذ التطبيق :

$$h((m_i)_{i \in I}) = \sum_{i=1}^n g_i(m_i) \text{ ب المعرفة } h: \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M$$

فيكون h تشاكل

إن h تطبيق لأن :



$$\forall m_i, m'_i \in \bigoplus_{i \in I} M_i \quad \forall i \in I$$

بحيث $(m_i) = (m'_i)$

$$\Rightarrow g_i(m_i) = g_i(m'_i)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n g_i(m_i) = \sum_{i=1}^n g_i(m'_i)$$

$$\Rightarrow h(m_i) = h(m'_i)$$

وإن h تشاكل مودولي لأن :

$$\forall m_i, m'_i \in \bigoplus_{i \in I} M_i \quad \forall i \in I, \alpha, \beta \in R$$

$$h(\alpha(m_i) + \beta(m'_i)) = h(\alpha m_i + \beta m'_i)$$

$$= \sum_{i \in I} g_i(\alpha m_i + \beta m'_i)$$

$$= \alpha \sum_{i \in I} g_i(m_i) + \beta \sum_{i \in I} g_i(m'_i)$$

$$\alpha h(m_i) + \beta h(m'_i)$$

ومن جهة ثانية $\forall x \in M_i$ فإن $h(in_i(x)) = g_i(x)$

وأن h وحيد لأنه لو وجد تشاكل آخر

$$k: \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M$$

بحيث: $(koin_i) = g_i$

عندئذ يكون:

$$k\left(\left(in_j\right)_{i \in I}\right) = k(in_i(m_i))$$

$$= \sum_{i \in I} (koin_j)(m_i) = \sum_{i \in I} g_i(m_i) = h((m_i)_{i \in I})$$

أي أن $k = h$ أي h وحيد وبالتالي يكون:

$$\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, (in_j)_{i \in I}\right) \text{ جداء مرافق للأسرة } (M_i)_{i \in I}$$

المجموع المباشر الداخلي: لتكن $(M_i)_{i \in I}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M على الحلقة R نقول إن

M مجموع مباشر داخلي للأسرة $(M_i)_{i \in I}$ إذا كان التطبيق: $h: \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M$ تماثلاً

وبمعنى مكافئ: $m = \sum_{i \in I} m_i$: $\forall m \in M$ إن $m_i = 0$ باستثناء عدد منته منها

تعريف: ليكن A, B مودولين جزئيين من M على الحلقة R : نقول أن A جداء مباشر لـ M

$$\text{ونكتب } M = A \oplus B$$

إذا كان $M = A + B$, $A \cap B = 0$ ونقول في هذه الحالة أن A, B متكاملان

تعريف (1): لتكن المتتالية التامة :

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \dots (1)$$

نقول إن (1) منشطر إذا وجد تشاكل مودولي $\rho: N \rightarrow M$ بحيث

$$\rho \circ f = I_M$$

ويسمى ρ التشاكل المنشطر

تعريف (2): لتكن المتتالية التامة :

$$N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0 \dots (2)$$

نقول إن (2) منشطرة إذا وجد تشاكل مودولي :

$$\pi: P \rightarrow N$$

بحيث $g \circ \pi = I_P$ ونسمي π التشاكل المنشطر

تعريف (3): لتكن المتتالية التامة :

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0 \dots (3)$$

نقول إن (3) منشطرة من اليسار إذا كانت $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N$ منشطرة

ونقول أن (3) منشطرة من اليمين إذا كانت $N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ منشطرة

أن π, ρ موجودين دائما كتطبيقات

مبرهنة: إذا كانت

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0 \dots (3)$$

متتالية تامة من التشاكلات المودولية فغن القضييتين متكافئتين

1- المتتالية (3) منشطرة من اليسار

2- Imf حد متكامل مباشر من المودول N

البرهان:

(1) \Leftrightarrow (2) لنفرض أن (3) منشطرة من اليسار ولتكن $\exists \rho: N \rightarrow M$ تشاكل منشطر أي:

$$\rho \circ f = I_M$$

ولنبرهن أن $N = Imf \oplus Ker\rho$ $\forall n \in N$

فإن $\rho(n - (f \circ \rho)(n)) = \rho(n) - \rho(f \circ \rho)(n)$

$$= \rho(n) - \underbrace{(\rho \circ f) \circ \rho(n)}_{=I_M} = \rho(n) - (I_M \circ \rho)(n)$$

$$= \rho(n) - \rho(n) = 0_M$$

وبالتالي فإن $n - (f \circ \rho)(n) \in Ker\rho$

ولكن $(f \circ \rho)(n) = f(\rho(n)) \in Imf$

ومنه $n \in Imf + Ker\rho$

أي أن: $N = Imf + Ker\rho \dots (*)$

ولنبرهن أن هذا المجموع المباشر: $\forall x \in Imf \cap Ker\rho$

فإن $x \in Imf \Leftrightarrow \exists m \in M$ بحيث $x = f(m)$

$$\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker } \rho \text{ و}$$

$$\rho(f(m)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\rho \circ f)(m) = I_M = 0 \Leftrightarrow \rho \circ f = I_M \text{ ولكن}$$

$$x = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

$$\text{Im } f \cap \text{Ker } \rho = 0 \Leftrightarrow$$

وبالتالي فإن المجموع (*) مباشر أي

$$N = \text{Im } f \oplus \text{Ker } \rho$$

(2) \Leftrightarrow (1): لنفرض ان $\text{Im } f$ حد مكمل مباشر في N عندئذ يوجد مودول جزئي B من N

بحيث $N = \text{Im } f \oplus B$ وبالتالي $\forall n \in N$ فإن n يكتب بصورة وحيدة

$$n = x + b ; x \in \text{Im } f, b \in B$$

ولكن f تشاكل متباين (كون المتتالية (3) تامة)

فإنه يوجد عنصر وحيد $m \in M$ وبالتالي فإنه يمكن كتابة m بالشكل $m = f^{-1}(x)$

وعليه يمكن تعريف تشاكل ما : $\rho: N \rightarrow M$ بالعلاقة

$$\rho(n) = \rho(x + b) = f^{-1}(x)$$

والذي من أجل : $(\rho \circ f)(m) = \rho(f(m)) = f^{-1}(f(m)) = m$

أي $\rho \circ f = I_M$ وهذا يعني أن ρ تشاكل منشطر من اليسار فإن (3) منشطر من اليسار