معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثالثة

البنى الجبرية 3

المحاضرة 11

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية - جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف - واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

◄ دكتور المادة: بشار الحسين

◄ المحاضرة : الحادية عشر

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- مبرهنات

2- المتتاليات المنشطرة

-3

مبرهنة : إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات على الحلقة R فإن $\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\,,(in_j)_{i\in I}\right)$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

الإثبات :

ليكن M مودولا على حلقة R ولتكن $(g_i: M_i \to M)_{i\in I}$ أسرة تشاكلات مودولية ولنأخذ التطبيق :

$h: \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$ المعرفة ب $h((m_i)_{i\in I}) = \sum_{i=I} g_i(m_i)$

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "in_j"'] & M \\
\bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

فيكون h تشاكل

إن h تطبيق لأن :

$$\forall\, m_i\,, m_i' \in \bigoplus_{i\in I} M_i \quad \forall i \in I$$

بحيث $(m_i) = (m_i')$

$$\Rightarrow g_i(m_i) = g_i(m_i')$$

$$\Rightarrow \sum_{i=I} g_i(m_i) = \sum_{i=I} g_i(m_i')$$

$$\Rightarrow h(m_i) = h(m_i')$$

وإن h تشاكل مودولي لأن :

$$\forall m_i , m_i' \in \bigoplus_{i\in I} M_i \quad \forall i \in I \ , \alpha, \beta \in R$$

$$h(\alpha(m_i) + \beta(m_i')) \ = h(\alpha m_i + \beta m_i')$$

$$= \sum_{i=I} g_i(\alpha m_i + \beta m_i')$$

$$= \alpha \sum_{i=I} g_i(m_i) + \beta \sum_{i=I} g_i(m_i{}')$$

$$\alpha h(m_i) + \beta h(m_i')$$

ومن جهة ثانية $\forall x \in M_i$ فإن $(hoin_i)(x) = h\big(in_i(x)\big) = g_i(x)$

وأن h وحيد لأنه لو وجد تشاكل آخر

$$k: \oplus_{i\in I} M_i \to M$$

بحيث : $(koin_i) = g_i$

عندئذ يكون :

$$k\left(\left(in_j\right)_{i\in I}\right) = k\big(in_i(m_i)\big)$$

$$= \sum_{i\in I} \left(koin_j\right)(m_i) = \sum g_i(m_i) = h((m_i)_{i\in I})$$

أي أن $k = h$ أي h وحيد وبالتالي يكون :

$\left(\oplus_{i\in I} M_i , \left(in_j\right)_{i\in I}\right)$ جداء مرافق للأسرة $(M_i)_{i\in I}$

المجموع المباشر الداخلي : لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M على الحلقة R نقول إن M مجموع مباشر داخلي للأسرة $(M_i)_{i\in I}$ إذا كان التطبيق : $h: \oplus_{i\in I} M_i \to M$ تماثلا

وبمعنى مكافئ : $m = \sum_{i\in I} m_i \quad : \quad \forall m \ \in M$ إن $m_i = 0$ باستثناء عدد منته منها

تعريف : ليكن A, B مودولين جزئيين من M على الحلقة R : نقول أن A جداء مباشر ل M

ونكتب $M = A \oplus B$

اذا كان $M = A + B$, $A \cap B \ = 0$ ونقول في هذه الحالة أن A, B متكاملان

تعريف (1):لتكن المتتالية التامة :

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \dots (1)$$

نقول إن (1) منشطر إذا وجد تشاكل مودولي $\rho: N \to M$ بحيث

$$\rho o f = I_M$$

ويسمى ρ التشاكل المنشطر

تعريف (2): لتكن المتتالية التامة :

$$N \xrightarrow{g} P \to 0 \dots (2)$$

نقول إن (2) منشطرة إذا وجد تشاكل مودولي :

$$\pi: P \to N$$

بحيث $g o\pi = I_P$ ونسمي π التشاكل المنشطر

تعريف (3) : لتكن المتتالية التامة :

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0 \dots (3)$$

نقول إن (3) منشطرة من اليسار إذا كانت $0 \to M \xrightarrow{f} N$ منشطرة

ونقول أن (3) منشطرة من اليمين إذا كانت $N \xrightarrow{g} P \to 0$ منشطرة

أن ρ, π موجودين دائما كتطبيقات

مبرهنة : إذا كانت

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0 \;.....(3)$$

متتالية تامة من التشاكلات المودولية فغن القضيتين متكافئتين

1- المتتالية (3) منشطرة من اليسار

2- Imf حد متكامل مباشر من المودول N

البرهان :

$(1) \Leftarrow (2)$ لنفرض أن (3) منشطرة من اليسار ولتكن $\exists\rho: N \to M$ تشاكل منشطر أي :

$$\rho o f = I_M$$

ولنبرهن أن $N = Imf \oplus Ker\rho \qquad \forall n \in N$

فإن: $\rho(n-(fo\rho)_n) = \rho(n) - \rho(fo\rho)_n$

$$= \rho(n) - \underbrace{(\rho o f)}_{=I_M} o\rho(n) = \rho(n) - (I_M o\rho)(n)$$

$$= \rho(n) - \rho(n) = 0_M$$

وبالتالي فإن : $n - (fo\rho)(n) \in Ker\rho$

ولكن $(fo\rho)(n) = f\big(\rho(n)\big) \in Imf$

ومنه $n \in Imf + Ker\rho$

أي أن: $N = Imf + Ker\rho \;....(*)$

ولنبرهن أن هذا المجموع المباشر: $\forall x \in Imf \cap Ker\rho$

فإن $x \in Imf \;\Leftarrow\; \exists m \in M$ بحيث $x = f(m)$

و $x \in Ker\rho \Leftarrow \rho(x) = 0$

$$\Leftarrow \rho\big(f(m)\big) = 0$$

ولكن $\rho of = I_M \Leftarrow (\rho of)(m) = I_M = 0$

$$m = 0 \Leftarrow x = 0$$

$$\Leftarrow Imf \cap Ker\rho = 0$$

وبالتالي فإن المجموع $(*)$ مباشر أي

$$N = Imf \oplus Ker\rho$$

$(2) \Leftarrow (1)$: لنفرض ان Imf حد مكمل مباشر في N عندئذ يوجد مودول جزئي B من N

بحيث $N = Imf \oplus B$ وبالتالي $\forall n \in N$ فإن n يكتب بصورة وحيدة

$$n = x + b \quad ; x \in Imf, b \in B$$

ولكن f تشاكل متباين (كون المتتالية (3) تامة)

فإنه يوجد عنصر وحيد $m \in M$ وبالتالي فإنه يمكن كتابة m بالشكل $m = f^{-1}(x)$

وعليه يمكن تعريف تشاكل ما : $\rho: N \to M$ بالعلاقة

$$\rho(n) = \rho(x + b) = f^{-1}(x)$$

والذي من أجل : $(\rho of)(m) = \rho\big(f(m)\big) = f^{-1}\big(f(m)\big) = m$

أي $\rho of = I_M$ وهذا يعني أن ρ تشاكل منشطر من اليسار فإن (3) منشطر من اليسار