نظري

◄ دكتور المادة: خليل تحيى

◄ المحاضرة: السادسة

◄ عنوان المحاضرة: معادلة برنولي

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- حل الوظيفة
2- معادلة برنولي
3- امثلة عنها
4- وظيفة سيتم حلها في المحاضرة القادمة

حل الوظيفة اولا .... أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية (بالاعتماد على طريقة برنولي).

$$y' - \frac{2x}{x^2+3}y = (x^2+3)cosx \dots (1)$$

الحل:

نفرض أن $y = u.v$ حيث $v = v(x)$ و $u = u(x)$

نشتق y لنحصل على $y' = u'v + v'u$

و نعوض في (1) لنحصل على:

$$u'v + v'u - \frac{2x}{x^2+3}u.v = (x^2+3)cosx$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2+3}v\right) = (x^2+3)cosx \dots *$$

نفرض $v' - \frac{2x}{x^2+3}v = 0$

منه $\frac{dv}{v} = \frac{2x}{x^2+3}dx$

$$\ln|v| = \ln|x^2+3| \quad \to \quad v = (x^2+3)$$

و منه نعوض في * لتصبح المعادلة

$$u'(x^2+3)=(x^2+3)cosx$$

$$du=cosx\,dx \quad \rightarrow \quad u=sinx+c$$ نكامل

و منه $y=u.v$ فإن المعادلة تصبح كلاتي:

$$y=(sinx+c)(x^2+3)$$

و هو الحل العام المطلوب بطريقة برنولي..

$$(x^2+1)y'+3xy=6x \;....(2)$$

الحل:

نقسم الطرفين على (x^2+1)

$$y'+\frac{3x}{x^2+1}y=\frac{6x}{x^2+1}\;...(I)$$

نفرض $y=u.v$ بالاشتقاق $y'=u'v+v'u$

نعوض في I

$$u'v+v'u+\frac{3x}{x^2+1}u.v=\frac{6x}{x^2+1}$$

$$u'v+u\left[v'+\frac{3x}{x^2+1}v\right]=\frac{6x}{x^2+1}\;...(1)$$

نوجد قيمة وحيدة لـ v بحيث يكون:

$$v'+\frac{3x}{x^2+1}v=0 \Rightarrow \frac{dv}{dx}=-\frac{3x}{x^2+1}v \Rightarrow \frac{dv}{v}=-\frac{3x}{x^2+1}dx$$

بالتكامل: $\ln|v|=-\frac{3}{2}\ln|x^2+1| \Rightarrow v=e^{-ln\,(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

نعوض في المعادلة 1

$$\frac{du}{dx}e^{-\ln(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{6x}{x^2+1}$$

$$u' = \frac{6x}{x^2+1} e^{\ln(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow u' = 2\left[\frac{1}{2}\frac{6x}{x^2+1}\right] e^{\ln(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$u = 2e^{\ln(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} + c_1$$

وبالتالي هو الحل العام $y = u.v$

معادلات برنولي

نقول عن المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى أنها معادلة برنولي إذا كانت من الشكل:

$$\boldsymbol{y' + p(x).y = q(x).y^n} \dots (\mathbf{1})$$

حيث أنّ: $\boldsymbol{n \neq 1}$

و $q(x)$ و $p(x)$ دالتان معرفتان ومستمرتان على مجال $I = [a, b]$ من $\mathbb{R}$

ولإيجاد الحل العام نقسم الطرفين على y^n فنجد أن:

$$\frac{y'}{y^n} + p(x).\frac{1}{y^{n-1}} = q(x) \dots (2)$$

نفرض أنّ: $z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$

نشتق الطرفين: $z' = (1-n).y^{-n}.y'$

نعوض الآن ما سبق في المعادلة التفاضلية (2): $\frac{1}{1-n}.z' + p(x).z = q(x)$

و هي معادلة خطية غير متجانسة يتم ايجاد الحل العام لها وفق خطوات الحل في المحاضرة السابقة.

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

$$\boldsymbol{y' + 2xy = -xy^4}$$

الحل:

نقسم الطرفين على y^4 :

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^4} + \frac{2x}{y^3} = -x \ldots (1)$$

وهي معادلة من الشكل برنولي إذاً نفرض:

$$z = \frac{1}{y^3} = y^{-3}$$

نشتق الطرفين:

$$\Rightarrow z' = -3.y'.y^{-4} = -3\,\frac{y'}{y^4}$$

نضرب المعادلة (1) بـ(-3):

$$\Rightarrow -3\frac{y'}{y^4} - \frac{6x}{y^3} = 3x$$

والآن نعوض:

$$\Rightarrow z' - 6x.z = 3x \;\; \ldots \; (2)$$

وهكذا حصلنا على معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى نحلّها كما يأتي

نوجد الحل العام لها بدون طرف ثاني:

$$z' - 6xz = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 6xz$$

نكامل لنجد أن:

$$\frac{dz}{z} = 6x.dx \quad \rightarrow \quad \ln|z| = 3x^2 + \ln|c|$$

$$z = c.e^{3x^2}$$

و هو الحل بدون طرف ثاني و الآن نجعل c تابعا ل x ثم نشتق بالنسبة ل x:

$$z = c(x).e^{3x^2} \quad \rightarrow \quad z' = c'(x).e^{3x^2} + 6x.e^{3x^2}.c(x)$$

نعوض في المعادلة (2):

$$c'(x).e^{3x^2} + 6x.e^{3x^2}.c(x) - 6x.e^{3x^2}.c(x) = 3x$$

$$c'(x).e^{3x^2} = 3x \quad \rightarrow c'(x) = 3x.e^{-3x^2}$$

نكامل الطرفين:

$$c(x) = -\frac{1}{2}e^{-3x^2} + c_1$$

نعوض c في z

$$z = \left(\frac{1}{2}e^{-3x^2}\right).e^{3x^2}$$

والآن نعوض $z = \frac{1}{y^3}$ لنحصل على الحل العام المطلوب.

$$y^{-3} = -\frac{1}{2} + c.e^{3x^2} \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{2} + c.e^{3x^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

وهو الحل العام بطريقة برنولي ☺

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{2y}$$

الحل:

نضرب ب $2y$:

$$2yy' - \frac{2}{x}y^2 = 1 \ldots \quad (1)$$

$$z = y^2 \quad \rightarrow \quad z' = 2yy'$$

نعوض z في (2)

$$Z' - \frac{2}{x}z = 1$$

و هي معادلة غير متجانسة من المرتبة الأولى لإيجاد الحل العام لها نأخذ المعادلة بدون طرف ثاني:

$$z' - \frac{2}{x}z = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2}{x}z \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{2}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{z}dz = 2\int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln|z| = 2\ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln\left|\frac{z}{c}\right| = \ln|x|^2 \Longrightarrow \frac{z}{c} = x^2 \Longrightarrow z = c.x^2$$

نجعل c تابعا ل x ثم نشتق بالنسبة ل x

$$z = c(x).x^2 \dots (*) \ \rightarrow z' = c'(x).x^2 + 2x.c(x)$$

نعوض في المعادلة طرف ثاني:

$$c'(x).x^2 + 2x.c(x) - \frac{2}{x}.c(x).x^2 = 1 \Rightarrow c'(x).x^2 = 1 \Rightarrow c'(x) = \frac{1}{x^2}$$

نكامل لنحصل على:

$$c(x) = -\frac{1}{x} + c_1$$

نعوض قيمة c في *: $z = x^2.(-\frac{1}{x} + c_1)$

والآن نعوض $z = y^2$: $y^2 = x^2.(-\frac{1}{x} + c_1)$

وهو الحل العام المطلوب.

وظيفة .. تترك للطالب وسيتم ادراج حلها في المحاضرة القادمة ☺

اوجد الحلال العام للمعادلة $y' + 2xy = xy^3$

انتهت المحاضرة

إعداد: راما عوض * علا الدالاتي