◀ دكتور المادة: خليل يحيى
◀ المحاضرة : الخامسة ◀ عنوان المحاضرة: طريقة برنولي
نظري

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- حل تمارين
2- طريقة برنولي
3- وظيفة

تمارين: اوجد الحل العام للمعادلات التالية

1- $y' + 2xy = 4x \ldots\ldots (I)$

الحل:

نوجد الحل العام دون طرف ثان: $y' + 2xy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

اصبحت معادلة قابلة لفصل المتحولات

$$\frac{dy}{y} = -2xdx \xrightarrow[\text{بالتكامل}]{} \ln|y| = -x^2 + \ln|c|$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = -x^2 \Rightarrow y = ce^{-x^2}$$

و هو الحل العام بدون طرف ثان

لايجاد الحل العام مع طرف ثان نجعل c تابعة لـx

$$y_1 = c(x)e^{-x^2} \xrightarrow[\text{بالاشتقاق}]{} y_1' = c'(x)e^{-x^2} - 2x\, c(x)\, e^{-x^2}$$

نعوض $y_1 \,\&\, y_1'$ في المعادلة الاصلية I

$$c'(x)e^{-x^2} - 2x\, c(x)e^{-x^2} + 2x\, c(x)\, e^{-x^2} = 4x$$

$$c'(x)e^{-x^2} = 4x$$

$$c'(x) = 4x\, e^{x^2} \Longrightarrow c(x) = 2\, e^{x^2} + c_1$$

$$y_2 = \left(2e^{x^2} + c_1\right)e^{-x^2}$$

وبالتالي الحل العام هو $y = y_1 + y_2$

$y' - \frac{1}{x}y = 1 \ldots . (I)$ -2

الحل:

- نوجد الحل العام بدون طرف ثان

$$y' - \frac{1}{x}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

هي معادلة قابلة لفصل المتحولات

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln|c| \rightarrow y = c.x$$

و هو الحل العام دون طرف ثان

لايجاد الحل مع طرفٍ ثانٍ نجعل c تابعة لـ x

$$y_1 = c(x)x \Longrightarrow y_1' = c'(x)x + c(x)$$

نعوض في المعادلة الاصلية I

$$c'(x)x + c(x) - \frac{1}{x}c(x)x = 1$$

$$c'(x)\, x = 1 \Longrightarrow c'(x) = \frac{1}{x} \xRightarrow[\text{بالتكامل}]{} c(x) = \ln|x| + c_1$$

$$y_2 = (\ln|x| + c_1)x$$

و هو الحل الخاص للمعادلة

وبالتالي الحل العام $y = y_1 + y_2$

$$y' + (\tan x)y = \frac{1}{\cos x}$$ -3

الحل:

نوجد الحل دون طرف ثانٍ

$$y' + y.\tan x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos x}\ y$$

معادلة قابلة لفصل المتحولات بعد المكاملة نحصل على: $y = c.\cos x$

لايجاد الحل العام كع طرف ثانٍ نجعل c تابعة لـ x

$$y_1 = c(x).\cos(x)$$

$$y_1' = c'(x).\cos x - c(x).\sin x$$

نعوض في I

$$c'(x).\cos x - c(x).\sin x + \tan x\,.\,c(x)\,.\cos x = \frac{1}{\cos x}$$

حيث $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$c'(x).\cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow c'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$c(x) = \tan x + c_1$$

$$y_2 = (\tan x + c_1).\cos x$$

الحل العام هو $y = y_1 + y_2$

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}$$ -4

الحل:

نوجد الحل العام بدون طرف ثانٍ

$$y' + \frac{3}{x}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{3}{x}dx$$

$$\ln|y| = -3\ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = \ln|x^{-3}| \Rightarrow y = x^{-3}.c$$

نوجد c تابع لـ x

$$y_1 = x^3.c(x)$$

$$y_1' = c'(x)x^{-3} - 3c(x)x^{-4}$$

نعوض في I

$$c'(x)x^{-3} - 3c(x)x^{-4} + \frac{3}{x}c(x)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$c'(x)x^{-3} = \frac{2}{x^3} \Longrightarrow c'(x) = 2$$

$$c(x) = 2x + c_1 \Longrightarrow y_2 = (2x + c_1)x^{-3}$$

الحل العام يكون $y = y_1 + y_2$

طريقة برنولي:

$$y' + p(x)y = q(x) \dots (1)$$

نفرض أن $y = u.v$ حيث $v = v(x)$ و $u = u(x)$

نشتق y لنحصل على $y' = u'v + v'u$

نعوض في (1): $u'v + uv' + p(x)u.v = q(x)$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x) \dots (2)$$

نفرض أنّ:

$$v' + p(x)v = 0$$

و هي معادلة قابلة لفصل المتحولات

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v \rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \rightarrow \text{نكامل} \rightarrow \ln|v| = -\int p(x)dx$$

و منه فإن

$$v = e^{-\int p(x)dx} \ldots *$$

نعوض * في (2)

$$e^{-\int p(x)dx}.\frac{du}{dx} + 0 = q(x)$$

$$\frac{du}{dx} = q(x).e^{\int P(x)dx}$$

و منه فإن:

$$du = q(x).e^{\int p(x)dx}\,dx$$

$$u = \int q(x).c_1.e^{\int p(x)dx}.dx$$

نعوض $u.v$ في الفرض $y = u.v$ وهو الحل العام بطريقة برنولي

وظيفة أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية (بالاعتماد على طريقة برنولي).

$$y' - \frac{2x}{x^2+3}y = (x^2+3)cosx \ldots (1)$$

$$(x^2+1)y' + 3xy = 6x \ldots .(2)$$

"اكبر ضعف هو الاستسلام وافضل طريقة للنجاح هي المحاولة اكثر من مرة واحدة"

انتهت المحاضرة

إعداد:راما عوض*عُلا الدالاتي