معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

البنى الجبرية1

المحاضرة18

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

◄ دكتور المادة: فادي أبو حرب

◄ المحاضرة: الثامنة عشر ◄ عنوان المحاضرة: التشاكل الزمري

التشاكل الزمري:

لتكن $G\,,G'$ زمرتين ما, نسمي كل تطبيق: $f: G \longrightarrow G'$ تشاكلاً زمرياً اذا حقق الشرط التالي:

$$\forall x,y \in G\,;\, f(x,y) = f(x).f(y)$$

تعريف: ليكن $f: G \longrightarrow G'$ تشاكلاً زمرياً نسمي المجموعة:

$$Ker\ f = \{x : x \in G; f(x) = e'\}$$

نواة الزمرة, حيث e' حيادي زمرة المستقر.

مبرهنة: $f: G \longrightarrow G'$ تشاكلاً زمرياً حيث $G\,,G'$ زمرتين اختياريتين ولنفرض ان e,e' حيادي كل من G,G' على الترتيب وليكن $g \in G$ و H زمرة جزئية من G عندئذٍ:

-1 $f(e) = e'$

-2 $f(g^{-1}) = [f(g)]^{-1}$

-3 $f(g^n) = [f(g)]^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

-4 المجموعة $f(H) = \{f(h); h \in H\}$ زمرة جزئية من G'

-5 $ker\ f$ زمرة جزئية ناظمية في G

-6 اذا كانت H دوارة فإن $f(H)$ زمرة دوارة (وظيفة)

-7 اذا كانت H تبديلية فإن $f(H)$ زمرة تبديلية

-8 اذا كانت H ناظمية فإن $f(H)$ زمرة ناظمية في $f(G)$

-9 اذا كانت $o(g) = n$ فإن $o\big(f(g)\big)$ يقسم n

-10 اذا كانت $(H:1) = n$ فإن $(f(H):1)$ يقسم n

-11 اذا كان $f(g) = g$ فإن: $f^{-1}(g') = \{x : x \in G\,;\, f(x) = g'\} = g.\ker f$

-12 اذا كانت k' زمرة جزئية في G' فإن:

$$f^{-1}(k') = \{k : k \in G\,;\, f(k) \in k'\}$$

زمرة جزئية في G

-13 اذا كانت k' ناظمية في G' فإن: $f^{-1}(k')$ ناظمية في G

-14 $ker\ f =< e >$ عندما وفقط عندما التطبيق f متباين.

البرهان:

برهان رقم 5:

$ker\ f$ زمرة جزئية ناظمية في G لنبرهن ان $ker\ f$ زمرة جزئية ناظمية في G

ان $f \neq \emptyset$ لان $f(e) = e'$ ومنه $e \in \ker f$, لنبرهن الان ان :

$$\forall x, y \in \ker f \implies x.y^{-1} \in \ker f$$

لدينا: $x \in \ker f \implies f(x) = e'$

$$y \in \ker f \implies f(y) = e'$$

ولنثبت ان $x.y^{-1} \in \ker f$ أي لنثبت ان $f(x.y^{-1}) = e'$

لاثبات ذلك لدينا: $f(x.y^{-1}) = f(x).f(y^{-1}) = f(x)\big(f(y)\big)^{-1}$

$$= e'(e')^{-1} = e'.e' = e'$$

ومنه $kerf$ زمرة جزئية في G. لنثبت ان $kerf$ ناظمية

$$\forall a \in G\ ; a\ kerf\ a^{-1} \subseteq kerf$$

ليكن : $x \in akerf\ a^{-1}$ ولنثبت ان $x \in kerf$

لدينا: $x \in a\ kerf\ a^{-1}$ يوجد $y \in kerf$ بحيث $x = aya^{-1}$

أي لنثبت ان $x \in kerf$, $f(x) = e'$

$$f(x) = f(a.y.a^{-1}) = f(a).f(y).f(a^{-1})$$

$$= f(a).e'.\big(f(a)\big)^{-1} = f(a).\big(f(a)\big)^{-1} = e'$$

ومنه $kerf$ ناظمية في G

برهان رقم 14:

$kerf =< e > \Leftrightarrow f$ متباين

ولنثبت ان f متباين : $\forall x, y \in G\ ; f(x) = f(y) \implies x = y$

$$f(x) = f(y)$$

$$f(x).\left(f(y)\right)^{-1} = e'$$

$$f(x.y^{-1}) = e'$$

ومنه $kerf =< e >$ $x.y^{-1} \in$ أي $x.y^{-1} = e$ وبالتالي $x = y$

كفاية الشرط: لنفرض ان f متباين ولنثبت ان $kerf = < e >$ ليكن $z \in kerf$ ومنه $f(z) =$
$e' = f(e)$

$\Leftarrow z = e$ ومنه $kerf = < e >$

برهان رقم 6:

اذا كانت H دوارة فإن $f(H)$ دوارة.(هامة)

لنفرض ان $H =< a >$ حيث $a \in H$ ولنبرهن ان $f(H) =< f(a) >$

بما ان $a \in H$ فإن $f(a) \in f(H)$ وبالتالي $< f(a) >\subseteq f(H) \ldots (1)$

ليكن $y \in f(H)$ عندئذٍ $y = f(x)$ حيث $x = a^n$

$$y = f(n) = f(a^n) = \left(f(a)\right)^n \in< f(a) >$$

ومنه $f(H) \subseteq< f(a) > \cdots (2)$ ومن 1 و2 نجد ان $f(H) =< f(a) >$ وبالتالي الزمرة $f(H)$ دوارة.

مبرهنة:

لتكن G زمرة ما عندئذٍ كل زمرة جزئية ناظمية من G هي نواة تشاكل زمري غامر.

تعريف: لتكن G زمرة و H زمرة جزئية ناظمية في G نسمي التشاكل الزمري الغامر

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$

$$\pi(g) = gH$$

وذلك اياً كان g من G اسمه التشاكل الطبيعي (القانون الغامر)

تعريف: لتكن G, G' زمرتين اختياريتين و $f: G \longrightarrow G'$ تشاكل زمري نقول عن f انه تماثل اذا كان f متباين و غامر.

ونقول عن الزمرتين G, G' انهما متماثلتان اذا وجد بينهما تماثل ونعبر عن ذلك $G \cong G'$

انتهت المحاضرة

إعداد: وئام النمر، ولاء الأخضر، أبرار الخالد