معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

المعادلات التفاضلية1

المحاضرة 12و13

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

◄دكتور المادة: خليل تحيى

◄المحاضرة :الثانية عشر

◄عنوان المحاضرة:المعادلات التفاضلية من مراتب عليا

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- ايجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية ذات المراتب العليا

2- تعريفين .. وامثلة

لناخذ المعادلات التفاضلية من الشكل:

$$y'^n + p_1(x,y)y'^{(n-1)} + p_2(x,y)y'^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x,y)y' + p_n(x,y) = 0$$

تمكن تحويل هذه المعادلة التفاضلية الى عوامل من الدرجة الاولى لـ y':

$$[y' - f_1(x,y)][y' - f_2(x,y)] \ldots\ldots [y' - f_n(x,y)] = 0$$

حيث ان: $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ دوال معرفة ومستمرة في المتغيرين x, y ..

في هذه الحالة نحصل على n معادلة تفاضلية من المرتبة الاولى في y' ونوجد الحل العام لكل معادلة تفاضلية ☺

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(x,y,c_1) = 0 \\ &\varphi_2(x,y,c_2) = 0 \\ &\quad .. \\ &\quad \ldots \\ &\varphi_n(x,y,c_n) = 0 \end{aligned}\right\}$$

حلول المعادلة التفاضلية

حيث:

$(c_1, c_2, .. c_3)$

جداء هذه الحلول يعطينا الحل العام:

$$F(x,y,c) = [\varphi_1(x,y,c_1)][\varphi_2(x,y,c_2)] \ldots . [\varphi_n(x,y,c_n)] = 0$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y^2 {y'}^2 + xyy' - 2x^2 = 0 \dots (1)}$$

الحل:

$$a = y^2 \,, \qquad b = xy \,, \quad c = -2x^2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = x^2y^2 - 4\,(y^2)(-2x^2) = 9x^2y^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = |3xy|$$

$$y_1' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-xy + 3xy}{2y^2} = \frac{x}{y}$$

$$y_2' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-xy - 3xy}{2y^2} = \frac{-2x}{y}$$

$$\left(y' - \frac{x}{y}\right)\left(y' + \frac{2x}{y}\right) = 0 \dots (*)$$

الأن نوجد تكامل ما داخل الأقواس لكي نستطيع إيجاد الحل العام للمعادلة(*)

$$: y' - \frac{x}{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y.dy = x.dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c_1 \dots (1)$$

$$: y' + \frac{2x}{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y} \Rightarrow y.dy = -2x.dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -x^2 + c_2 \dots (2)$$

نعوض $(\mathbf{1})$ و$(\mathbf{2})$ في $(*)$ فنحصل على الحل العام المطلوب:

$$\left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - c_1\right)\left(\frac{y^2}{2} + x^2 - c_2\right) = 0$$

المعادلات التفاضلية من مراتب عليا

تعريف: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0}$$

والمتجانسة في y ومشتقاتها وتحقق العلاقة:

$$F(x, \lambda.y, \lambda.y', \dots, \lambda.y^{(n)}) = \lambda^n.F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

وبالتالي لإيجاد الحل العام نفرض: $\boxed{\lambda = \frac{1}{y}}$ فتصبح المعادلة من الشكل:

$$F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0$$

ومنه نفرض لخفض مرتبة المعادلة التفاضلية: $\frac{y'}{y} = z \Rightarrow y' = y.z$

$$y'' = y'.z + y.z' \xrightarrow{y'=y.z} y'' = y.z^2 + y.z' = y(z^2 + z') \Rightarrow \frac{y''}{y} = (z^2 + z')$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y.y'' - y'^2 = 6xy^2 \dots (1)$$

الحل

نفرض:

$$\frac{y'}{y} = z \dots (*) \Rightarrow y' = y.z$$

$$\frac{y''}{y} = (z^2 + z') \dots (**)$$

نقسم طرفي المعادلة (1) على y^2 فيصبح لدينا:

$$\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 6x$$

والآن نعوض * و ** في المعادلة الأخيرة فيصبح لدينا:

$$(z^2 + z') - z^2 = 6x \Rightarrow z' = 6x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 6x \Rightarrow dz = 6x.dx$$

$$\xRightarrow{\text{تكامل}} z = 3x^2 + c_1 \xRightarrow{z=\frac{y'}{y}} \frac{y'}{y} = 3x^2 + c_1 \Rightarrow \boxed{y' = (3x^2 + c_1).y}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى لنوجد الحل العام لها:

$$\frac{dy}{dx} = (3x^2 + c).y \Rightarrow \frac{dy}{y} = (3x^2 + c).dx$$

$$\overset{\text{نكامل}}{\Longrightarrow} \ln|y| = x^3 + c_1x + c_2 \Rightarrow y = e^{x^3+c_1x+c_2}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

انتهت المحاضرة

إعداد: راما عوض * عُلا الدالاتي

نظري

◄دكتور المادة: خليل تحيى

◄المحاضرة :الثالثة عشر ◄عنوان المحاضرة:معادلة كليرو

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1 - معادلة كليرو
2 - المعادلات التفاضلية من المرتبة n
3 - التوابع المستقلة خطيا ومعين رونكسي
4 - مبرهنات + امثلة

معادلة كليرو

تأخذ معادلة كليرو الشكل:

$$y = x.P + F(P) \,;\, P = y'$$

لإيجاد الحل العام لهذه المعادلة نشتق بالنسبة ل x :

$$(y' = P) = P + x.\frac{dP}{dx} + F'(P).\frac{dP}{dx} = P + [x + F'(P)].\frac{dP}{dx}$$

$$\Rightarrow [x + F'(P)].\frac{dP}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow P = c$$

فيكون الحل العام من الشكل: $\boxed{y = c.x + F(c)}$

وأنّ: $x + F'(P) = 0$ تعطينا الحل الشاذ لمعادلة كليرو.

((أمّا الحل العام ف ينتج عن تبديل كل P ب c)) .

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية والحل الشاذ:

$$y = x.P + 2P^2 \ldots (1)$$

الحل:

نلاحظ أنّ هذه المعادلة من نوع معادلة كليرو لذلك يكون الحل العام بتبديل كل: $P = c$

نشتق بالنسبة ل x : $y' = P + x.\frac{dP}{dx} + 4P.\frac{dP}{dx} = P + [x + 4P].\frac{dP}{dx}$

$$\Rightarrow [x + 4p].\frac{dP}{dx} = 0$$

إمّا: $\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow P = c$ نعوضها بالمعادلة (1) فنحصل على الحل العام:

$$y = cx + 2c^2$$

أو: $[x + F'(P)] = 0; F(P) = 2p^2 \Rightarrow F'(P) = 4P$

$$\Rightarrow x + 4P = 0 \Rightarrow P = -\frac{x}{4}$$

نعوضها بالمعادلة (1) فنحصل على الحل الشاذ: $y = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{8}$

التوابع المستقلة خطياً ومعين رونسكي

تعريف: نقول عن مجموعة التوابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ أنّها مستقلة خطياً في المجال $[a, b]$ إذا تحقق:

$$\alpha_1.y_1 + \alpha_2.y_2 + \cdots + \alpha_n.y_n = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

ونقول عن هذه التوابع أنّها مرتبطة خطياً إذا كانت $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ليست جميعها أصفاراً.

مبرهنة (1):

إذا كانت التوابع: $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ مرتبطة خطياً على المجال $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق من المرتبة $(n-1)$ فإنّ المعين:

$$w(x) = w[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

يطابق الصفر على المجال $[a, b]$ نسمي هذا المعين (المحدد): معيّن رونسكي.

إذا كان معين رونكسي لا يطابق الصفر فإننا نقول أن مجموعة التوابع مستقلة خطيا.

وبما أنّ التوابع مرتبطة خطياً فإنّ: $\alpha_1 . y_1 + \alpha_2 . y_2 + \cdots + \alpha_n . y_n = 0 \ldots (1)$

أنّ الثوابت $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ليست جميعها أصفاراً.

وباشتقاق العلاقة (1) لـ $(n-1)$ مرة متتالية :

$$\alpha_1 . y_1 + \alpha_2 . y_2 + \cdots + \alpha_n . y_n = 0$$

$$\alpha_1 . y_1' + \alpha_2 . y_2' + \cdots + \alpha_n . y_n' = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 . y_1^{n-1} + \alpha_2 . y_2^{n-1} + \cdots + \alpha_n . y_n^{n-1} = 0$$

وبالتالي هذه العلاقات تمثّل جملة معادلات جبرية متجانسة بالنسبة إلى $\alpha_i ; i = 1,2, \ldots, n$

وحسب الفرض فإنّها تقبل حلاً غير الحل الصفري لأجل كل قيمة لـ x على المجال $[a, b]$ وهذا لا يتحقق إلّا إذا كان معيّن الأمثال (رونسكي) يطابق الصفر.

نستنتج من المبرهنة السابقة:

أنّه إذا كانت جملة التوابع $y_1, y_2, \ldots, y_n$ قابلة للاشتقاق على المجال $[a, b]$ وكان معين رونسكي لهذه التوابع لا يطابق الصفر فإنّ جملة التوابع تكون مستقلة خطياً.

مبرهنة (2):

إذا كان التابع $y_1(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة:

$$y^{(n)} + P_1(x) . y^{(n-1)} + P_2 . y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1} . y' + P_n(x) . y = 0 \ldots (1)$$

فإنّ $c . y_1$ هو أيضاً حلاً لها حيث c ثابت كيفي.

مبرهنة (3):

إذا كان التابعان: $y_1(x), y_2(x)$ حلان للمعادلة التفاضلية المتجانسة الخطية (1)

فان حاصل جمع التابعان أيّ: $y_1 + y_2$ هو أيضا ً حل للمعادلة التفاضلية (1) .

نستنتج من المبرهنتين السابقتين (2) و(3):

أنّه إذا كان $y_1, y_2, \dots, y_n$ حلولاً للمعادلة التفاضلية (1) فإنّ التابع:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i . y_i = c_1 . y_1 + \dots + c_n . y_n$$

يكون حلاً لها أيضاً.

مبرهنة (4):

إذا كانت معاملات المعادلة الخطية (1): $P_i(x); i = 1,2, \dots, n$ توابع حقيقية وإذا كانت المعادلة تقبل حلاً مركباً من الشكل: $y(x) = u(x) + i.v(x); i^2 = -1$ فإنّ كلاً من $u(x)$ الحقيقي و $v(x)$ التخيلي هو حلاً للمعادلة (1)

جملة الحلول الأساسية

تعريف: إذا كانت جملة التوابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ حلولاً خاصة للمعادلة التفاضلية (1) وإذا كانت جملة التوابع مستقلة خطياً فندعوها جملة الحلول الأساسية للمعادلة التفاضلية (1).

مبرهنة (5): إذا كانت $y_1, y_2, \dots, y_n$ جملة حلول أساسية للمعادلة (1) وإذا كانت المعاملات $P_i(x)$ توابع مستمرة على مجالها فإنّ محدد رونسكي $w(x) \neq 0$.

- المعادلة التفاضلية الحاوية على المشتق فقط $F(y') = 0$ ولنفرض ان لهذه المعادلة عدد منته او غير منته من الحلول " الجذور" $y' = l_i \,; i = 1,2, \dots, n$
- $l_i = \frac{y-c}{x} \Leftarrow y = l_i\, x + c \Leftarrow y' = l_i \Leftarrow F(l_i) = 0$ ومنه $F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$ وهو الحل العام ... ☺

مثال: اوجد الحل العام:

$$y'^3 - y'^2 + y' - 1 = 0 \text{ «}$$

الحل:

نعوض: $\frac{y-c}{x}$ في المعادلة الاصلية

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^3-\left(\frac{(y-c)}{x}\right)^2+\left(\frac{y-c}{x}\right)-1=0$$

وهو الحل العام ... ☺

** المعادلة التي لا تحوي x: $F(y,y')=0$

ولنفترض ان هذه المعادلة غير قابلة للحل بالنسبة للمشتق عندئذٍ يمكن تمثيلها وسيطيا على الشكل التالي

$$y=\varphi(t)\quad,\quad y'=\psi(t)$$

باستخدام العلاقة الاساسية $dy=y'dx$ نجد $\varphi'(t)\,dt=\psi(t)dx$ ومنه $dx=\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt$

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt+c$$

وبالتالي فان الحل العام للمعادلة التفاضلية وسيطيا يعطى:

$$\begin{cases} x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt \\ y=\varphi(t)\end{cases}$$

ملاحظة:

- اذا حذفنا الوسيط بين المعادلتين تحصل على الحل العام ديكارتيا
- اذا كانت المعادلة قابلة للحل بالنسبة للمشتق y' حيث يكون: $y'=f_l(y)$ الحل العام يعطى بالشكل: $\int\frac{dy}{f_l(y)}=x+c$

** المعادلة لاتحوي y: وهذه المعادلة لها الشكل $F(x,y')=0$

$$x=\varphi(t)\qquad,\qquad y'=\psi(t)$$

$$dy=y'dx$$

$$dy=\psi(t).\varphi'(t)dt$$

$$y=\int\psi(t).\varphi'(t)\,dt+c$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة يعطي وسيطيا بالشكل:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varphi(t, c) \end{cases}$$

وظيفة ... ☺

- $x = e^{y'} - y'$
- $y = y' + \ln y'$
- $y'^3 - y = 0$

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''' = e^x$ ثم بين الحل الخاص المحقق للشروط:

$$y(0) = 2 \ \& \ \ y'(0) = 1 \ \ \& \ y''(0) = 1$$

اوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y''^2 - 5y' + 6 = 0$

انتهت المحاضرة

إعداد: راما عواض ❋ علا الدالات