نظري

◄دكتور المادة: خليل يحيى

◄المحاضرة: السادسة عشر & السابعة عشر

◄عنوان المحاضرة: المعادلات التفاضلية الغير متجانسة ذات امثال ثابتة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- حل تمارين
2- المعادلات التفاضلية الغير متجانسة ذات الامثال الثابتة
3- امثلة عنها

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 9y = 0$

الحل:

نفرض ان $y = e^{\lambda x} \quad \& \quad y' = \lambda e^{\lambda x} \quad \& \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

نعوض في المعادلة الاساسية $\lambda^2 e^{\lambda x} + 9e^{\lambda x} = 0$

$$e^{\lambda x}[\lambda^2 + 9] = 0 \rightarrow \lambda^2 + 9 = 0 \rightarrow \lambda^2 = -9 \rightarrow \lambda = \pm 3i$$

وبالتالي الحلول الخاصة هي: $y_1 = e^{3ix} \quad \& \quad y_2 = e^{-3ix}$

$$e^{3ix} = (\cos 3x + i \sin 3x) \quad \& \quad e^{-3ix} = (\cos 3x - i \sin 3x)$$

وبالتالي الحل العام هو: $y = c_1 \cos 3x + i\, c_2 \sin 3x$

حالات جذور المعادلة المميزة:

-الحالة الثالثة:

إذا كانت جذور المعادلة المميزة حقيقية ولكنها مكررة $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n}$ فإن الحل لها :

$$\boldsymbol{y = e^{\lambda_i . x}}$$

تمثل حل واحد من الشكل: $\boldsymbol{y = e^{bx}}$.

ومنه فإن العلاقة :

$$\boldsymbol{y = c_1 . e^{\lambda_1 x} + c_2 . e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n . e^{\lambda_n x}}$$

لا تعطي الحل للمعادلة التفاضلية وفي هذه الحالة تكون المعادلة المميزة من الشكل:

$$\boldsymbol{F(\lambda) = (\lambda - b)^n}$$

حيث $\boldsymbol{n}$ هو عدد الجذور.

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

الحل:

المعادلة المميزة من الشكل:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^3 = 0$$

$$\lambda = 1 = b \Rightarrow F(\lambda) = (\lambda - 1)^3$$

وبالتالي الحلول الخاصة هي

$$y_1 = e^{1x} \quad \& \quad y_2 = xe^{1x} \quad \& \quad y_3 = x^2 e^{1x}$$

والحل العام هو: $y = c_1 e^x + c_2 x\, e^x + c_3 x^2 e^x$

◄**ملاحظة:إذا** قبلت المعادلة المميزة الجذر المركب $\boldsymbol{\alpha + \beta i}$ مضاعفاً $\boldsymbol{m}$ مرة فيوجد للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة الحلول الخاصة المستقلة من الشكل:

$$\boldsymbol{e^{(\alpha+\beta i)x}\,,\, x . e^{(\alpha+\beta i)x}, \ldots \ldots}$$

وهكذا قد نكون اوجدنا الحلول الخاصة ثم نكتب الحل العام ☺

اوجد الحل العام للمعادلة $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

الحل:

المعادلة المميزة من الشكل: $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

$$(\lambda^2+1)^2=0 \to \lambda^2=-1 \to \lambda=\pm i \to \lambda_1=-i \ \& \ \lambda_2=i$$

جذر مكرر وبالتالي الحلول الخاصة هي $y_1=e^{ix} \ \& \ y_2=e^{-ix}$

$$y_1=\cos x+i\sin x \quad \& \quad y_2=\cos x-i\sin x$$

والحل العام هو: $y=c_1\cos x+c_2\, i\sin x$

انتهت المحاضرة

المحاضرة السابعة عشر 8-12-2019

المعادلات التفاضلية الخطية ذات المتحولات الثابتة

الشكل العام لهذه المعادلات من الشكل

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=g(x)\ \ldots(1)$$

لايجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة (1) نقوم بما يلي:

1. نوجد حلا عاما للمعادلة التفاضلية المتجانسة $a_0y^n+a_1y^{(n-1)}+\cdots.+a_ny=0$

وبعد ذلك نوجد حلا خاصا للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة وليكن y_p

2. نجمع الحلين فيكون لدينا حلا عاما للمعادلة التفاضلية الغير متجانسة (1) أي: $Y=y+y_p$

1. نفرض ان $g(x)$ هو جداء كثير حدود من الدرجة m بدالة اسية:

أي من الشكل: $g(x)=p_m(x)e^{ax}$ أي بمعنى اخر: $l(y)=p_m(x)e^{ax}$

حيث $a\in R$ وc & $m\geq 0$ **عندئذ لايجاد الحل الخاص نميز حالتين:**

1- الحالة الأولى:

a ليس جذرا للمعادلة المميزة في هذه الحالة سنبحث عن الحل الخاص y_p من الشكل:

$y_p = q_m(x)e^{ax}$ حيث q كثير حدود من الدرجة mبامثال: q_1 , q_2 , q_m يجب تعيينها عن طريق الاشتقاق والتعويض والمطابقة مع الطرف الثاني مع أمثال x ذات الأسس المتماثلة

2- الحالة الثانية:

a جذر للمعادلة المميزة من المرتبة k حيث $k \geq 1$ عندئذ نبحث عن حل خاص من الشكل

$y_p = x^k q_m(x)e^{ax}$ حيث q_m كثير حدود من الدرجة m بامثال $q_1 , q_2 , \dots , q_m$ يجب تعيينها عن طريق الاشتقاق والتعويض والمطابقة مع الطرف الثاني مع أمثال x ذات الأسس المتماثلة

2. نفرض ان $g(x)$ التي تمثل اطرف الثاني هي على الشكل:

$$g(x) = e^{ax}[P_{1m}(x)\cos bx + P_{2m}(x)\sin bx]$$

وبالاستفادة من علاقة اولر:

$$g(x) = P_{1m}(x)e^{(a+ib)x} + P_{2m}(x)e^{(a-ib)x}$$

ولايجاد الحل الخاص نميز الحالتين:

1- α ليس جذر للمعادلة المميزة حيث $\alpha = a + ib$

$$a_0\lambda^n + a_1\,\lambda^{n-1} + \cdots + an = 0$$

$$y_p = e^{\alpha x}[q_{m1}(x)\cos bx + q_{m2}(x)\sin bx]$$

بالاشتقاق والمطابقة مع الطرف الثاني نحصل على معاملات كثيرات الحدود

2- $\alpha = a + ib$ جذر للمعادلة المميزة عندئذٍ يكون الحل الخاص من الشكل التالي $y_p =$ $x^k\,e^{\alpha x}[q_{1m}(x)\cos bx + q_{2m}(x)\sin bx]$ حيث: $(k \geq 1)$

مثال: $y'' - 7y' = 6e^{6x}$

الحل:

1. نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة $y'' - 7y' = 0$
2. نفرض الحل الخاص لها من الشكل $y = e^{\lambda x}$
3. نشت مرتين نجد $y' = \lambda e^{\lambda x} \& y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

4. نعوض في المعادلة الأساسية:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 7\lambda e^{\lambda x} = 0$$

بإخراج عامل مشترك $e^{\lambda x}[\lambda^2 - 7\lambda] = 0$

نقسم المعادلة على $e^{\lambda x} \neq 0$: $\lambda^2 - 7\lambda = 0$ وهي المعادلة المميزة نوجد حلها بالتحليل المباشر $\lambda(\lambda - 7) = 0$ ومنه الحلول الخاصة هي $y_1 = e^{0x} = 1 \quad \& y_2 = e^{7x}$

والحل العام بدون طرف ثاني: $y = c_1 + c_2 e^{7x}$

1. <u>نوجد الحل الخاص للمعادلة مع طرف ثان:</u>

نلاحظ ان $a = 6$ ليست جذرا للمعادلة المميزة اذا الحل الخاص من الشكل $y_p = Ae^{6x}$

نشتق مرتين لنجد $y_p' = 6Ae^{6x} \& y_p'' = 36Ae^{6x}$

نعوض في المعادلة الغير متجانسة:

$$36Ae^{6x} - 42Ae^{6x} = 6e^{6x} \Rightarrow -6Ae^{6x} = 6Ae^{6x} \Rightarrow A = -1 \;\Rightarrow y_p = -e^{6x}$$

<u>فيكون الحل العام للمعادلة الخطية "بجمع الحلين الخاص و العام"</u>

$$Y = y + y_p \Rightarrow c_1 + c_2 e^{7x} - e^{6x}$$

مثال2: $y'' - 4y' + y = 2x^3 + 3x^2 - 1$

الحل:

نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة $y'' - 4y' + y = 0$

ومنه المعادلة المميزة $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(1) = 12 \;\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 2 + \sqrt{3} \& \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 2 - \sqrt{3}$$

والحلول الخاصة هي من الشكل:

$$y_1 = e^{(2+\sqrt{3})x} \& y_2 = e^{(2-\sqrt{3})x}$$

والحل العام بدون طرف ثان هو :

$$y = c_1 e^{(2+\sqrt{3})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{3})x}$$

الحل الخاص: نلاحظ ان: $a = 0$ ليس جذرا للمعادلة المميزة $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

بالاشتقاق: $y'_p = 3Ax^2 + 2Bx + C \qquad \& y''_p = 6Ax + 2B$

نعوض في المعادلة المتجانسة:

$$6Ax + 2B - 4(3Ax^2 + 2Bx + C) + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$$\left.\begin{aligned} &A = 2 \\ &-12A + B = 3 \\ &6A - 8B + C = 0 \\ &2B - 4C + D = -1 \end{aligned}\right\}$$

$A = 2 \,, B = 27 \,, C = 204$

$D = 761$

ومنه الحل الخاص: $y_p = 2x^3 + 27x^2 + 204x + 761$

وبالتالي يكون الحل العام من الشكل:

$$Y = c_1 e^{(2+\sqrt{3})x} + c_2 e^{(2-\sqrt{3})x} + 2x^3 + 27x^2 + 204x + 761$$

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الاتية

$$y'' - 7y' = (3 - 36x)e^{4x} \quad (1$$

الحل:

1) نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة: $y'' - 7y' = 0$

المعادلة المميزة: $y'' - 7\lambda = 0$

$$\lambda(\lambda - 7) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \ , \qquad \lambda = 7$$

2) الحلول الخاصة هي: $y_1 = e^{0x} = 1 \qquad \& y_2 = e^{7x}$

3) الحل العام دون طرف ثان: $y = c_1 + c_2 e^{7x}$

4) نوجد الحل الخاص للمعادلة مع طرف ثانٍ نلاحظ ان $a = 4$ ليست جذرا للمعادلة المميزة

$$\Rightarrow y_p = (A+Bx)e^{4x} \Rightarrow y_p = Ae^{4x} + Bxe^{4x}$$

بالاشتقاق: $y_p' = 4Ae^{4x} + Be^{4x} + 4Bxe^{4x} \;\&\; y_p'' = 16Ae^{4x} + 8Be^{4x} + 16Bxe^{4x}$

نعوض في المعادلة الغير متجانسة:

$$16Ae^{4x} + 8Be^{4x} + 16Be^{4x} - 7(4Ae^{4x} + Be^{4x} + 4Bxe^{4x}) = (3-36x)e^{4x}$$

$$-12Ae^{4x} + Be^{4x} - 12Bxe^{4x} = (3-36x)e^{4x}$$

$$\left.\begin{array}{l} -12A + B = 3 \\ -12B = -36 \end{array}\right\} \quad B = 3 \;\; \& \; A = 0$$

$$\Rightarrow y_p = 3xe^{4x} \xrightarrow[\text{الحل العام}]{} y = c_1 + c_2e^{7x} + 3xe^{4x}$$

انتهت المحاضرة

إعداد: راما عوض * علا الدالاتي