معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

البنى الجبرية1

المحاضرة21

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

◄ دكتور المادة: فادي أبو حرب

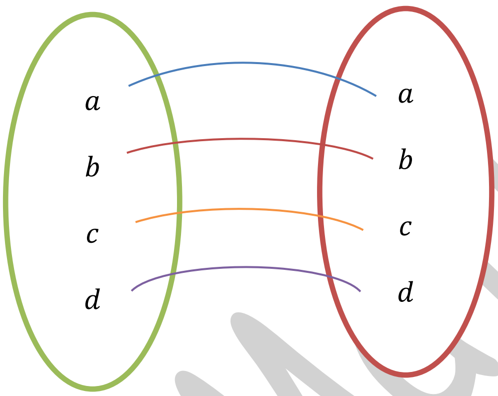
◄ المحاضرة : الواحدة والعشرون ◄ عنوان المحاضرة: الجداء المباشر

ما العلاقة بين الجداء المباشر ل :

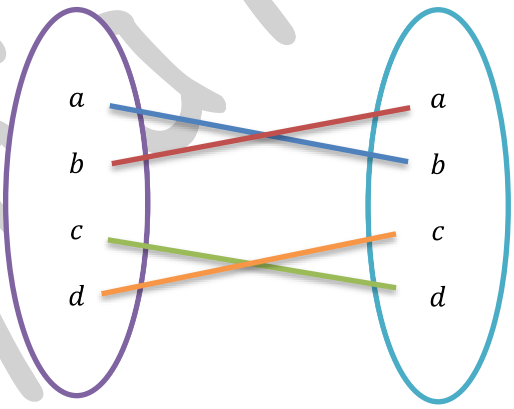
$$Z_2 \oplus Z_3 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$$

$$Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$$

تساوي



تماثل



خواص الجداء المباشر من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة (بدون برهان): لتكن G_1 , G_2 زمرتين وليكن e_1, e_2 حيادي كلاً منهما على الترتيب, ولنأخذ

زمرة الجداء $G_1 \oplus G_2$ و $G_2 \oplus G_1$

القضايا التالية صحيحة:

-1 $G_1 \oplus G_2 \cong G_2 \oplus G_1$

-2 $Z(G_1 \oplus G_2) = Z(G_1) \oplus Z(G_2)$

-3 كلاً من $< e_2 > \oplus G_1$ و $< e_1 > \oplus G_2$ زمرة جزئية من $G_1 \oplus G_2$

-4 $< e_2 > \oplus G_1 \cong G_1$

$G_2 \cong < e_1 > \oplus G_2$

-5 الزمرة $G_1 \oplus G_2$ تبديلية عندما وفقط عندما تكون كل من الزمرتين G_1, G_2 تبديلية.

مبرهنة (هامة) مرتبة كل عنصرمن الجداء المباشر لعدد منته من الزمر المنتهية يساوي المضاعف المشترك الأصغر لمراتب المركبات.

برهان:

لتكن G_i زمرة منتهية حيث $1 \leq i \leq n$ وليكن $(g_1, g_2, \dots g_n) \in G_1 \oplus G_2 \oplus \dots . \oplus G_n$

ولنبرهن على ان $o(g_1, g_2, \dots g_n) = lcm\big(o(g_1), \dots, o(g_n)\big)$

للسهولة ودون الحسب بعمومية المسألة سوف نبرهن ذلك من اجل $n = 2$ بمعنى اخر

$$o\big((a,b)\big) = lcm\big(o(a), o(b)\big)$$

ليكن $(a,b) \in G_1 \oplus G_2$ لنفرض ان $o(a,b) = t, o(a) = m$

$$o(b) = n \wedge \ lcm\big(o(a), o(b)\big) = lcm(m,n) = s$$

ولنبرهن على ان $s = t$ أي لنبرهن ان $t \leq s \wedge s \leq t$

- لدينا $o(a,b) = t$ ومنه

$$\begin{cases} (a,b)^t = (e_1, e_2) \\ (a,b)^t = (a^t, b^t) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a^t = e_1 \\ b^t = e_2 \end{matrix}$$

ولكن: $\begin{cases} o(a) = m \Rightarrow m \text{ يقسم } t \\ o(b) = n \Rightarrow n \text{ يقسم } t \end{cases} \Rightarrow t$ مضاعف لm, n

ولكن من جهة أخرى لدينا s هو مضاعف مشترك اصغر ل m, n ومنه $s \leq t \ \dots 1$

ايضاً لدينا $(a,b)^s = (a^s, b^s) = (a^{\lambda m}, b^{\mu n})$

$$= \left((a^m)^\lambda, (b^n)^\mu\right) = \left(e_1^\lambda, e_2^\mu\right) = (e_1, e_2)$$

ومنه حسب مبرهنة سابقة وكون $o(a,b) = t$ فإن t يقسم s أي $t \le s \ldots 2$

من1و2 نجد ان $s = t$ وهو المطلوب.

توضيح:

$$(a,b)^t = (a^t, b^t) \Leftarrow$$

$$(a,b)^3 = (a,b).(a,b).(a,b)$$

$$= (a.a, b.b).(a.b)$$

$$= a.a.a, b.b.b = (a^3, b^3)$$

وظيفة: اوجد مراتب العناصر $U(10) \oplus U(8)$

$$(3,5), (9,3), (7,5)$$

انتهت المحاضرة

إعداد: وئام النمر, ولاء الأخضر, أبرار الخالد