معك نحو

التخرج

Syria Math Team

البنى الجبرية1

السنة الثانية

المحاضرة23-24

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

نظري

◄ دكتور المادة: فادي أبو حرب

◄ المحاضرة: 23-24 والاخيرة

◄ عنوان المحاضرة: المجموع المباشر لزمر

المجموع المباشر لزمر :

لتكن G زمرة ولتكن $H_1, H_2, \dots H_n$ مجموعة من الزمر الجزئية الناظمية من الزمرة G نقول عن الزمرة G انها مجموع مباشر للزمر H_i حيث $1 \le i \le n$

ونكتب: $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$

اذا تحقق الشرطين:

1- $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n = \{h_1 . h_2 \dots . h_n \,; h_i \in H_i ; 1 \le i \le n\}$

2- $(H_1 . H_2 \dots . H_i) \cap H_{i+1} = < e >, i = 1,2, . . , n-1$

مبرهنة (دون برهان):

لتكن k, H زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G الشروط التالية متكافئة:

1- $G = k \times H$

2- أيا كان $g \in G$ فإن g يكتب بصورة وحيدة بالشكل:

$$g = k . h \,; k \in K \,, h \in H$$

مبرهنة: لتكن K, H زمر جزئية ناظمية في الزمرة G عندئذٍ:

$$K \times H \cong K \oplus H$$

البرهان:

$$\varphi : K \times H \longrightarrow K \oplus H$$

$$k . h \longmapsto \varphi(k . h) = (k, h)$$

ان φ تطبيق لان:

$$\forall kh, k_1h_1 \in K \times H\,; kh = k_1h_1 \Leftrightarrow k = k_1\ ,\ h_1 = h_2$$

$$\Leftrightarrow (k,h) = (k_1,h_1)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(kh) = \varphi(k_1,h_1)$$

ومنه φ تطبيق ومتباين.

φ تشاكل لان:

$$\varphi(x.y) = \varphi(x).\varphi(y)$$

$$\varphi(x.y) = \varphi\big((k_1.h_1)(k_2h_2)\big) = \varphi(k_1k_2.h_1h_2)$$

$$= (k_1,h_1)(k_2,h_2) = \varphi(k_1h_1)\varphi(k_2h_2) = \varphi(x).\varphi(y)$$

كما ان φ غامر وضوحاً.

ومما سبق نجد ان $K \times H \cong K \bigoplus H$

تذكير: مبرهنة: لتكن k,H زمر جزئية ناظمية في G اذا كان $k \cap H =< e >$ عندئذٍ فإن:

$$hk = kh\,;\ \forall k \in K\ ,h \in H$$

النظرية الأساسية للزمر التبديلية المنتهية:

ليكن p عدداً أولياً و G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد p عندئذٍ يوجد في G عنصراً مرتبته p

مبرهنة:

كل زمرة تبديلية منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد p تحوي زمرة جزئية مرتبتها p

المبرهنة الأساسية للزمر التبديلية المنتهية:

- كل زمرة تبديلية منتهية عبارة عن مجموع مباشر لزمرة دوارة مرتبة كل منها قوة لعدد اولي علاوة على ذلك فإن هذا التمثيل وحيد بغض النظر عن ترتيب المضاريب.

مثال: لتكن G زمرة تبديلية منتهية مرتبتها (1176)

نحلله لعوامله الاولية $2^3.3.7^2$

$$G \cong H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n$$

$$\cong Z_1n \times Z_2n \times Z_3n \cong Z_8 \times Z_3 \times Z_{45}$$

ان G تماثل واحداً فقط من المجاميع.

$$\cong Z_4 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_{49}$$

او

$$\cong Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_{49}$$

$$\cong Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_3 \times Z_7 \times Z_7$$

تعريف ال P زمرة:

ليكن P عدداً أولياً, نقول عن الزمرة المنتهية G انها زمرة P- زمرة اذا كانت مرتبتها قوة للعدد P أي اذا كان

$$(G:1) = P^n \ ; \ n \in N$$

مثال:

$(G:1) = 9 = 3^2$ $\quad$ $3-$ زمرة

$(G:1) = 25 = 5^2$ $\quad$ $5-$ زمرة

$(G:1) = 8 = 2^3$ $\quad$ $2-$ زمرة

مبرهنة:

اذا كانت G عبارة عن $P-$ زمرة

$$Z(G) \neq < e >$$

أي انها تحوي على الأقل عنصرين.

مبرهنة سيلوف الأولى:

لتكن G زمرة منتهية و P عدداً أولياً اذا كان P^k يقسم مرتبة الزمرة G عندئذٍ فإن الزمرة G تحوي زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها P^k

مثال: لتكن G مرتبتها $2^3.3^5.5^4.7$

حسب سيلوف فإنه يوجد زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها 8

يوجد زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها125

يوجد زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها625

يوجد زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها7

يوجد زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها4

يوجد زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها2

يوجد زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها9

يوجد زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها25

يوجد زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها8

يوجد زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها5

يوجد زمرة جزئية واحدة على الأقل مرتبتها3

بينما لاتخبرنا مبرهنة سيلوف عن زمرة جزئية مرتبتها $2.3 = 6$

نأخذ من مراتب G العدد بأكبر اس ونسميه $P-$ زمرة جزئية ومرتبتها هو الاس أي 2^3 مرتبتها 8

تعريف: لتكن G زمرة منتهية مرتبتها تقبل القسمة على العدد الاولي P اذا كان P^k حيث $k \geq 1$

يقسم مرتبة الزمرة G و P^{k+1} لا يقسم مرتبة الزمرة G عندئذٍ أي زمرة جزئية من G مرتبتها P^k تسمى $P-$ زمرة جزئية سيلوفية من G

بالعودة للمثال السابق نجد ان:

أي زمرة مرتبتها 8 تسمى 2– زمرة جزئية سيلوفية.

أي زمرة مرتبتها 625 تسمى 5– زمرة جزئية سيلوفية.

أي زمرة مرتبتها 7 تسمى 7– زمرة جزئية سيلوفية.

أي زمرة مرتبتها 243 تسمى 3– زمرة جزئية سيلوفية.

انتهت المحاضرة

وقد نوه الدكتور عن انه :

1- يوجد سؤال خارجي (5 درجات من مرجع اجنبي).

2- يوجد سؤال تمرين للطلاب غير محلول (5 درجات).

3- يوجد سؤال عملي او اكثر.

انتهى المقرر... كل عام وانتم بخير.. بالتوفيق لجميع الطلاب..

إعداد : وئام النمر، ولاء الأخضر، أبرار الخالد