27-11-2019

نظري

Syria Math

◄دكتور المادة: خليل تحيي

◄المحاضرة :الرابعة عشر و الخامسة عشر

◄عنوان المحاضرة:معادلة لاغرانج

**المحتوى العلمي** : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

**1- تمارين**

**2- معادلة لاغرانج**

اوجد الحل العام للمعادلتين التفاضليتين التاليتين:

1- $x = e^{y'} - y'$

**الحل:**

نفرض ان $y' = t$ ومنه $x = e^t - t$ ومن العلاقة الأساسية: $dy = y'dx$

$$\Rightarrow dy = t(e^t - 1)dt \Rightarrow y = t.e^t - e^t - \frac{t^2}{2} + c$$

ومنه: $y = t.e^t - e^t - \frac{t^2}{2} + c$ & $x = e^t - t$ "وهو الحل العام وسيطيا"

2- $y = y' + \ln|y'|$

**الحل:**

نفرض ان $y' = t$ ومنه $y = t + \ln t$ ومن العلاقة الأساسية نجد $dy = y'dx$

$$\Rightarrow dx = \frac{dy}{y'} \Rightarrow dx = \frac{1 + \frac{1}{t}}{t}dt \Rightarrow dx = \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) \underset{\text{نكامل}}{\Longrightarrow} x = \ln|t| - \frac{1}{t} + c$$

ومنه: $x = \ln|t| - \frac{1}{t} + c$ & $y = t + \ln|t|$

"وهو الحل العام وسيطيا"

مثال: اوجد الحل العام للمعادلة $y'^3 - y = 0$

الحل:

هذه المعادلة لاتحوي على $x$ اي ان $f(y', y) = 0$

لنفرض ان $y' = t$ و العلاقة الاساسية: $dy = y'dx$

وبالتالي $y = t^3$ ومنه $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{3t^2}{t}dt = 3t\ dt$

$$x = \int 3t\ dt = \frac{3}{2}t^2 + c$$

ويعطى الحل العام وسيطياً:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}t^2 + c \\ y = t^3 \end{cases}$$

---

اوجد الحل العام للمعادلة $y''' = e^x$ ثم بين الحل الخاص المحقق للشرط

$$y(0) = 2\ \&\ y'(0) = 1\ \&\ y''(0) = 1$$

الحل:

$$y'' = \int y'''\ dx = e^x + c_1 \quad \& \quad y' = \int (e^x + c_1)\ dx = e^x + xc_1 + c_2$$

$$y = \int (\ e^x + xc_1 + c_2\ )\ dx = e^x + \frac{c_1}{2}x^2 + xc_2 + c_3$$

$$y''(0) = 1\ \Rightarrow\ 1 = 1 + c_1\ \Rightarrow\ c_1 = 0$$

$$y'(0) = 1\ \Rightarrow\ 1 = 1 + 0 + c_2\ \Rightarrow\ c_2 = 0$$

$$y(0) = 2\ \Rightarrow\ 2 = 1 + 0 + 0 + c_3\ \Rightarrow\ c_3 = 1$$

وبالتالي الحل الخاص هو $y = e^x + 1$

---

اوجد الحل العام للمعادلة $y''^2 - 5y' + 6 = 0$

الحل:

$$(y'' - 3)(y'' - 2) = 0$$

اما: $y'' = 3 \Rightarrow y' = 3x + c_1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x^2 + xc_1 + c_2$

او: $y'' = 2 \Rightarrow y' = 2x + c_1 \Rightarrow y = x^2 + xc_3 + c_4$

والحل العام هو: $y * y = 0$

$$\left(\frac{3}{2}x^2 + xc_1 + c_2\right)(x^2 + xc_3 + c_4) = 0$$

---

## معادلة لاغرانج:

نسمي كل معادلة من الشكل: $y = xf(p) + g(p)$ حيث $y(p) \& f(p)$ دوال في $y' = P$ بمعادلة لاغرانج

**ملاحظة:** معادلة كليرو هي حالة خاصة من معادلة لاغرانج

- لايجاد الحل العام ... نشتق بالنسبة لـ $x$:

$$P = f(p) + x_1 f'(p)\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx}$$
$$P - f(p) = [x_1 f'(p) + g'(p)]\frac{dp}{dx}$$

وبالاصلاح نجد:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{P - f(p)}x = \frac{g'(p)}{P - f(p)}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية يكون الحل العام لها من الشكل:

$$x = c\varphi(P) + \psi(P)$$

بالتعويض في $y$ نحصل على الحل العام وسيطياً

---

**انتهت المحاضرة**

# المحاضرة الخامسة عشر 1-12-2019

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية: $y'' = y + 1$

**الحل:**

هذه المعادلة لاتحوي $x$ نفرض ان

$$y' = z \to y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx} = z'z = y + 1 \to \frac{dz}{dy}.z = y + 1$$

$$\to z.dz = (y + 1)dy \to \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}(y + 1)^2 + c_1 \to z^2 = (y + 1)^2 + c\,; c = 2c_1$$

$$\to z = \sqrt{(y + 1)^2 + c}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(y + 1)^2 + c} \to \int dy = \int \sqrt{(y + 1)^2 + c}\ dx \to y = x\sqrt{(y + 1)^2 + c}$$

---

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' - 3y' + 2y = 0$ اذا علمت ان لها حلولا خاصة من الشكل $y = e^{ax}$

**الحل:**

لنوجد الحل يجب ان نحدد قيمة $a$ لذلك نشتق العلاقة $y = e^{ax}$

$$y' = ae^{ax}\ \ \&\ \ y'' = a^2e^{ax}$$

نعوض في المعادلة:

$$a^2e^{ax} - 3ae^{ax} + 2e^{ax} = 0$$

$$e^{ax}[a^2 - 3a + 2] = 0$$

نقسم على $e^{ax}$ وبالتالي: $a^2-3a+2=0 \to (a-2)(a-1)=0$

اما: $a=1$ وبالتالي $y_1=e^x$

او: $a=2$ وبالتالي $y_2=e^{2x}$

وبالتالي للمعادلة حلين خاصين

لنختبر اذا كان الحلول الخاصة مستقلة خطيا ام لا:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} \neq 0$$

وبالتالي مستقلة خطيا ... والحل العام هو $y=c_1y_1+c_2y_2$

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}$$

---

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(x-1)y''-xy'+y=0$ علما انها تقبل حلين خاصين من الشكل $y_1=x_1\ \&\ y_2=e^x$

**الحل:**

$$y_1=x\ \&\ y_1'=1\ \&\ y_1''=0$$

نعوض في المعادلة $0-x+x=0$

$$y_2=e^x\ \&\ y_2'=e^x\ \&\ y_2''=e^x$$

نعوض في المعادلة: $xe^x-e^x-xe^x+e^x=0$

محقق: $\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} \neq 0$ وبالتالي هي مستقلة خطيا

والحل العام هو : $y=c_1x+c_2e^x$

---

## - المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة:

- نأخذ المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$A_0.y^{(n)}+A_1.y^{(n-1)}+A_2.y^{(n-2)}+\cdots+A_{n-1}.y'+A_n.y=0$$

وهي معادلة تفاضلية من مراتب عليا ذات أمثال ثابتة.

وإذا كانت الأمثال لهذه المعادلة من الشكل:

$a_0 , a_1, \dots \dots \dots . . a_n$ ثوابت

- الحلول الخاصة لهذه المعادلة من الشكل:

$$y = e^{\lambda x}$$

نشتق $n$ مرة ثم نعوض بالمعادلة التفاضلية:

$$y' = \lambda . e^{\lambda x} , y'' = \lambda^2 . e^{\lambda x} , \dots , y^{(n)} = \lambda^n . e^{\lambda x}$$

فنحصل على:

$$a_0 . \lambda^n . e^{\lambda x} + a_1 . \lambda^{n-1} . e^{\lambda x} + \cdots + a_n . e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x} (a_0 . \lambda^n + a_1 . \lambda^{n-1} + \cdots + a_n) = 0$$

$$e^{\lambda x} \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(a_0 . \lambda^n + a_1 . \lambda^{n-1} + \cdots + a_n) = 0}$$

تسمّى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية ذات الأمثال المتجانسة وبالتالي هذه المعادلة المميزة تشكل كثير حدود من الدرجة $n$ في $\lambda$ فهي تقبل $n$ جذراً لها ونميز عدة حالات:

- **الحالة الأولى:**

إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة مختلفة ولتكن $\lambda_1, \lambda_2, \dots , \lambda_n$ فنحصل على الحلول الخاصة:

$$y_1 = e^{\lambda_1 . x} , y_2 = e^{\lambda_2 . x} , \dots , y_n = e^{\lambda_n . x}$$

عدد هذه الحلول هو $n$ وهي مجموعة مستقلة خطياً وبالتالي تشكل جملة حلول أساسية للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة.

ويكون الحل العام معطى بالشكل التالي:

$$y = c_1 . e^{\lambda_1 . x} + c_2 . e^{\lambda_2 . x} + \cdots + c_n . e^{\lambda_n . x}$$

حيث $c_1, c_2, \dots , c_n$ كلها ثوابت.

---

**مثال:** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{y'' - 3y' + 2 = 0 \dots (*)}$$

## الحل:

نفرض أن: $y = e^{\lambda x}$ هو حل خاص للمعادلة التفاضلية (*) ومنه نجد:

$$y = e^{\lambda x} \Rightarrow y' = \lambda . e^{\lambda x} \Rightarrow y'' = \lambda^2 . e^{\lambda x}$$

نعوض بالمعادلة (*) فنحصل على:

$$\lambda^2 . e^{\lambda x} - 3\lambda . e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 1).(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_2 = 2 , \lambda_1 = 1 ,$$

$$\Rightarrow y_1 = e^x , y_2 = e^{2x} ,$$

فيكون الحل العام هو : $y = c_1 . e^x + c_2 . e^{2x}$

---

اوجد الحل العام $y''' - y' = 0$

## الحل:

لنفرض ان $y = e^{\lambda x}$ & $y' = \lambda e^{\lambda x}$ & $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ & $y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}$

وبالتالي نعوض في المعادلة :

$$\lambda^3 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} = 0 \to e^{\lambda x}[\lambda^3 - \lambda] = 0 \to \lambda^3 - \lambda = 0 \to \lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$

اما: $\lambda_1 = 0$

او: $\lambda^2 - 1 = 0 \to \lambda = \pm 1$

وبالتالي $\lambda_1 = 0$ & $\lambda_2 = 1$ & $\lambda_3 = -1$

وبالتالي الحل العام هو $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$

---

## الحالة الثانية:-

إذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة مختلفة $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ إلا أن قسما منها جذوراً عقدية وبالتالي إذا كان: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ هو عبارة عن جذر للمعادلة المميزة (المساعدة) فإنّ مرافقه: $\overline{\lambda_2} = \alpha - \beta i$ هو أيضاً جذرا لها ويكون للمعادلة حلان خاصان هما:

$$y_1 = e^{\alpha+\beta i} \quad , \quad y_2 = e^{\alpha-\beta i}$$

وبالتالي:

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}[\cos \beta x + i.\sin \beta x]$$

$$e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}[\cos \beta x - i.\sin \beta\beta x]$$

---

**مثال:** أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية: $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 0$

## الحل:

المعادلة المميزة:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5 = 0 \xrightarrow[\text{باستخدام القسمة المطولة}]{} (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$$

$$(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow 4 - 4(1)(5) = -16 = 16i^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4i \qquad \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 1 + 2i$$

$$\lambda_3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 1 - 2i$$

$$y_1 = e^x \quad , \quad y_2 = e^{(1+2i)x} \quad , \quad y_3 = e^{(1-2i)x}$$

الحل العام:

$$y = c_1.y_1 + c_2.y_2 + c_3.y_3 = c_1.e^x + c_2.e^{(1+2i)x} + c_3.e^{(1-2i)x}$$
$$= c_1e^x + e^x(c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x)$$

---

**انتهت المحاضرة**

إعداد: راما عوض * علا الدالاتي