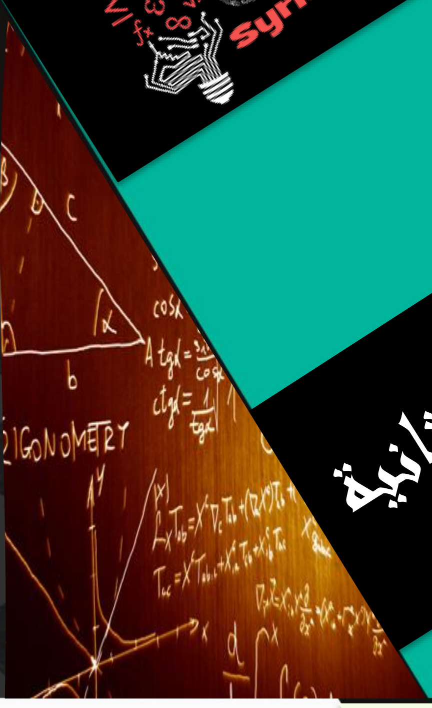
معك نحو

التخرج

Syria Math Team



السنة الثانية

المعادلات التفاضلية1

المحاضرة 10

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

◄دكتور المادة: خليل تحيى

◄المحاضرة :العاشرة ◄عنوان المحاضرة:عوامل التكميل

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- طرق اخرى لإيجاد عوامل التكميل

2- حل المعادلات التفاضلية الخطية بواسطة عوامل التكميل

لتكن لدينا المعادلة:

$$M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0 \ldots (1)$$

إذا كانت المعادلة (1) غير تامة و غير تامة من الشكل:

$$x.M(x,y) + y.N(x,y) \neq 0$$

عندئذٍ عامل التكميل يكون من الشكل:

$$\mu = \frac{1}{M.x + N.y}$$

أمّا إذا كانت المعادلة (1) غير تامة و غير متجانسة كان الشرط:

$$x.M(x,y) - y.N(x,y) \neq 0$$

وكانت المعادلة المعطاة بالشكل:

$$y.f_1(x,y).dx + x.f_2(x,y).dy = 0$$

عندئذٍ عامل التكميل يكون من الشكل:

$$\mu = \frac{1}{Mx - Ny}$$

مثال توضيحي:

أوجد عامل التكميل للمعادلة التفاضلية ثمّ أوجد الحل العام لها:

$$(x^2y-2xy^2).dx-(x^3-3x^2y).dy=0\ ...(*)$$

الحل:

لنبرهن أنها تامة أم لا:

$$M(x,y)=x^2y-2xy^2\Rightarrow\frac{dM}{dy}=x^2-4xy$$

$$N(x,y)=-x^3+3x^2y\Rightarrow\frac{dN}{dx}=-(3x^2-6xy)$$

أي أنّ المعادلة التفاضلية ليست تامة ونلاحظ أنها متجانسة أي أنّها من الحالة الأولى لنتحقق من الشرط الثاني ألا وهو:

$$x.M(x,y)+y.N(x,y)\neq 0$$

$$\Rightarrow x.M(x,y)+y.N(x,y)=x^3y-2x^2y^2-x^3y+3x^2y^2b=x^2y^2\neq 0$$

أيّ أنّ الشرط محقق ومنه يكون عامل التكميل:

$$\mu=\frac{1}{M.x+N.y}\Rightarrow\mu=\frac{1}{x^2y^2}$$

نضرب طرفي المعادلة (*) ب μ :

$$\frac{\mathrm{x}^2y-2xy^2}{x^2y^2}.dx-\left(\frac{x^3}{x^2y^2}-\frac{3x^2y}{x^2y^2}\right).dy=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{y}-\frac{2}{x}\right).dx-\left(\frac{x}{y^2}-\frac{3}{y}\right).dy=0$$

أصبحت المعادلة التفاضلية تامة والآن لنوجد الحل العام:

$$F(x,y)=\int M(x,y).dx+\varphi(y)$$

$$=\int(\frac{1}{y}-\frac{2}{x}).dx+\varphi(y)=\frac{x}{y}-2\ln x+\varphi(y)$$

نشتق جزئياً بالنسبة لـy :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = -\frac{x}{y^2} + \frac{3}{y}$$

$$\varphi'(y) = \frac{3}{\mathrm{y}} \to \ \varphi(\mathrm{y}) = 3\ln|\mathrm{y}|$$

نعوض قيمة $\varphi(y)$:

$$F(x,y) = \frac{x}{y} - 2\ln x - 3\ln y = c$$

مثال 2: أوجد عامل التكميل ثمّ أوجد الحل العام:

$$y(xy + 2x^2y^2).dx + x(xy - x^2y^2).dy = 0 \ldots (*)$$

الحل:

$$\mathrm{M(x,y) = xy^2 + 2x^2y^3 \Rightarrow \frac{dM}{dy} = 2xy + 6x^2y^2}$$

$$N(x,y) = x^2y - x^3y^2 \Rightarrow \frac{dN}{dx} = 2xy - 3x^2y^2$$

أي أنّها ليست تامة وليست متجانسة ونلاحظ أنّها من الشكل:

$$y.f_1(x,y).dx + x.f_2(x,y).dy = 0$$

نبرهن أنّ $Mx - Ny \neq 0$:

$$Mx - Ny = x^2y^2 + 2x^3y^3 - x^2y^2 + x^3y^3 = 3x^3y^3 \neq 0$$

فيكون عامل التكميل من الشكل:

$$\mu = \frac{1}{M.x - N.y} = \frac{1}{3x^3y^3}$$

نضرب المعادلة (*) ب μ لتصبح تامة ثمّ نوجد الحل العام:

$$\left(\frac{xy^2 + 2x^2y^3}{3x^3y^3}\right).dx + \left(\frac{1}{3xy^2} - \frac{1}{3y}\right).dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{3x^2y}+\frac{2}{3x}\right).dx+\left(\frac{1}{3xy^2}-\frac{1}{3y}\right).dy=0$$

الحل العام:

$$F(x,y)=\int M(x,y).dx+\varphi(y)=\int\frac{dx}{3x^2y}+\frac{2dx}{3x}+\varphi(y)$$

$$=-\frac{1}{3yx}+\frac{2}{3}\ln x+\varphi(y)$$

والآن نشتق جزئياً بالنسبة ل y :

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{3xy^2}+\varphi'(y)=N(x,y)$$

$$\frac{1}{3xy^2}+\varphi'(y)=\frac{1}{3xy^2}-\frac{1}{3y}$$

$$\varphi'(y)=-\frac{1}{3y}\xrightarrow{\text{تكامل}}\varphi(y)=-\frac{1}{3}\ln y$$

نعوض $\varphi(y)$ بالحل العام:

$$F(x,y)=-\frac{1}{3yx}-\frac{1}{3}\ln y=\mathrm{c}$$

مثال3: اوجد الحل العام لمعادلة التفاضلية التالية:

$$(x^3y^3+x^2y^2+xy+1)y\,dx+(x^3y^3-x^2y^2-xy+1)x\,dy=0$$

الحل:

$$M(x,y)=x^3y^4+x^2y^3+xy^2+y\ \Rightarrow\frac{dM}{dy}=4x^3y^3+3x^2y^2+2xy+1$$

$$N(x,y)=x^4y^3-x^3y^2-x^2y-x\ \Rightarrow\frac{dN}{dx}=4x^3y^3-3x^2y^2-2xy-1$$

ومنه المعادلة غير تامة وغير متجانسة

$$xM - yN = 2x^3y^3 + 2x^2y^2[xy+1] \Rightarrow \mu = \frac{1}{2x^2y^2(xy+1)}$$

نضرب طرفي المعادلة التفاضلية بـ μ فتصبح تامة ومتجانسة ومنه:

$$\frac{1}{2x^2y^2(xy+1)}(x^3y^3 + x^2y^3 + xy^2 + y)dx$$
$$+\frac{1}{x^2y^2(xy+1)}(x^4y^3 - x^3y^2 - x^2y - x)dy = 0$$

وبعدها نوجد الحل العام ...

مثال :

$$x^2ydx - (x^3+y^3)dy = 0$$
$$M(x,y) = x^2y \quad \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = x^2$$
$$N(x,y) = -x^3 - y^3 \quad \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -3x^2$$

فالمعادلة غير تامة و متجانسة :

$$xM + yN = x^3y - x^3y - y^4 = -y^4 \neq 0$$
$$\mu = \frac{-1}{y^4}$$

نضرب طرفي المعادلة بـ μ :

$$-\frac{1}{y^4}(x^2y)\,dx + \frac{1}{y^4}\,(x^3+y^3)dy = 0$$
$$-\frac{x^2}{y^3}dx + \left(\frac{x^3}{y^4} + \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

الآن نوجد الحل العام :

$$F(x,y) = \int -\frac{x^2}{y^3} dx + \varphi(y) = -\frac{x^3}{3y^3} + \varphi(y)$$

نشتق لـ y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^3}{y^4} + \varphi'(y)$$

نطابق مع N (في المعادلة الجديدة بعد الضرب بعامل التكميل) :

$$\frac{x^3}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{x^3}{y^4} + \frac{1}{y}$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y}$$

$$\varphi(y) = \ln(y) + c$$

نعوض في F :

$$F(x,y) = -\frac{x^3}{3y^3} + \ln(y) + c$$

انتهت المحاضرة

إعداد:راما عوض*علا الدالاتي