معك نحو

التخرج

Syria Math Team

المعادلات التفاضلية1

السنة الثانية

المحاضرة 7

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

نظري

◄ دكتور المادة: خليل تحيي

◄المحاضرة : السابعة ◄ عنوان المحاضرة: المعادلات التامة

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- حل الوظيفة
2- تعريف المعادلات التامة
3- امثلة عنها

حل الوظيفة من المحاضرة السابقة ☺

$$y' + 2xy = xy^3$$

الحل:

نقسم الطرفين على y^3 :

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^3} + \frac{2x}{y^2} = x \ldots (1)$$

وهي معادلة من الشكل برنولي إذاً نفرض:

$$z = \frac{1}{y^2} = y^{-2}$$

نشتق الطرفين:

$$\Rightarrow z' = -2.y'.y^{-3} = -2\frac{y'}{y^3}$$

نضرب المعادلة (1) بـ(-2):

$$\Rightarrow -2\frac{y'}{y^3} - \frac{4x}{y^2} = -2x$$

والآن نعوض في المعادلة:

$$\Rightarrow z' - 4x.z = -2x$$

وهكذا حصلنا على معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من المرتبة الأولى.

لإيجاد الحل العام لها:

- نوجد حل العام للمعادلة التفاضلية الخطية دون طرف ثانٍ:

$$z' - 4x.z = 0 \Rightarrow z' = 4x.z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 4x.z \Rightarrow \frac{dz}{z} = 4x.dx$$

$$\Rightarrow ln|z| = 2x^2 + ln|c| \Rightarrow ln|z| - ln|c| = 2x^2$$

$$\Rightarrow ln\left|\frac{z}{c}\right| = 2 \Rightarrow \frac{z}{c} = e^{2x^2} \Rightarrow \boxed{z_1 = c.e^{2x^2}}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (دون طرف ثانٍ).

- نوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (مع طرف ثانٍ):

ومن أجل ذلك نجعل الثابت c تابع لـx فنكتب الحل العام السابق بالشكل:

$$z = c(x).e^{2x^2} \ \ldots (*)$$

ثمَّ نشتق بالنسبة لـx :

$$\Rightarrow z' = c'(x).e^{2x^2} + 4x.e^{2x^2}.c(x)$$

والآن نعوض في المعادلة التفاضلية مع طرف ثانٍ:

$$\Rightarrow c'(x).e^{2x^2} + 4x.e^{2x^2}.c(x) - 4x.e^{2x^2}.c(x) = -2x$$

$$\Rightarrow c'(x).e^{2x^2} = -2x \Rightarrow c'(x) = \frac{-2x}{e^{2x^2}} = -2x.e^{-2x^2}$$

نكامل الطرفين:

$$\Rightarrow c(x) = \int -2x.e^{-2x^2}.dx = \frac{1}{2}\int -4x.e^{-2x^2}.dx$$

$$\Rightarrow c(x) = \frac{1}{2}e^{-2x^2} + c_1$$

نعوض قيمة $c(x)$ في العلاقة $(*)$ فنحصل على:

$$z = \left(\frac{1}{2}e^{-2x^2} + c_1\right).e^{2x^2} = c_1.e^{2x^2} + \frac{1}{2}$$

والآن نعود فنعوض قيمة z :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{y^2} = c_1 . e^{2x^2} + \frac{1}{2}}$$

وهو الحل العام المطلوب.

المعادلات التفاضلية التامة

نقول عن المعادلة التفاضلية:

$$M(x,y).dx + N(x,y).dy = 0 \ldots (1)$$

حيث أنَّ $M(x,y)$ و $N(x,y)$ دالتان معرفتان ومستمرتان على منطقة ما ولتكن G؛ إنّها تامة إذا وجد تابع $F(x,y)$ معرف ومستمر على G بحيث يكون:

$$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \ldots (2)$$

بالمقارنة بين (1) و (2) نجد أنَّ:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

والتفاضل العام الكلي:

$$\Rightarrow \boldsymbol{dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}.dx + \frac{\partial F}{\partial y}.dy}$$

بما أنَّ الدالتين $M(x,y)$ و $N(x,y)$ قابلتان للمفاضلة ، نأخذ المشتق الجزئي الثاني لها:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

وبالمقارنة طرفاً إلى طرف نجد:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$

وهو الشرط اللازم لكي تكون المعادلة التفاضلية (1) تامة.

ويكون الحل العام لهذه المعادلة هو: $F(x,y) = c$

مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\boldsymbol{x^2.dx + y^2.dy = 0}$$

الحل:

لو ضربنا المعادلة ب **3** نجد:

$$3x^2dx + 3y^2dy = 0$$

وبالملاحظة نجد انها تكافئ: $d(x^3 + y^3) = 0$

$$\xRightarrow[\text{بالمكاملة}]{} F(x,y) = x^3 + y^3 = c$$

$$x.dy + y.dx = 0$$

الحل:

$$\begin{cases} M(x,y) = y \Rightarrow \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 \\ N(x,y) = x \Rightarrow \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

ومنه فالمعادلة التفاضلية المدروسة تامة.

$$d(x.y) = 0$$

بالمكاملة نجد:

$$x.y = c \Rightarrow \boxed{y = \frac{c}{x}}$$

ملاحظة: في كثير من الاحيان لايمكننا ملاحظة فيما اذ كان الطرف الاول من المعادلة يشكل تفاضل تام لتابع مثلا $f(x,y)$ ام لا ولذلك سندرس طريق عام للحل العام

ايجاد الحل العام للمعادلات التفاضلية بالطريقة العامة:

وجدنا في المعادلة التفاضلية التامة تكون:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$

و الحل العام لها هو من الشكل:

$$f(x,y) = c$$

طريقة إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة بالطريقة العامة:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y)$$

حيث أن$\varphi(y)$ دالة تابعة ل y فقط فنوجدها حتى يتحقق الشرط المطلوب:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y).dx}{\partial y} + \varphi'(y) = N(x,y)$$

وبما أنّ المعادلة التفاضلية تامة فإنّ:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.dx + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$[N(x,y)]_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x,y)$$

$$N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y) = N(x,y) \Rightarrow N(x_0,y) = \varphi'(y)$$

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y).dy$$

$$\boxed{F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y).dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y).dy = c}$$

حيث أن $(x_0\ ,y_0)$ نقطة اختيارية بشرط أن تنتمي إلى ساحة تعريف الدالتين $M(x,y), N(x,y)$

بطريقة مشابهة(حيث يمكن أن نأخذ الدالة الأسهل للتكامل):

$$F(x,y) = \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy + \varphi(x)$$

حيث $\varphi(x)$ دالة تابعة ل x فقط

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} . dy + \varphi'(x) = M(x,y)$$

و بما أنّ المعادلة التفاضلية تامة فإنّ:

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} . dy + \varphi'(x) = M(x,y)$$

$$[M(x,y)]_{y_0}^{y} + \varphi'(y) = M(x,y)$$

$$M(x,y) - M(x,y_0) + \varphi'(y_0) = M(x,y_0) \Rightarrow M(x,y_0) = \varphi'(x)$$

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} M(\mathrm{x},y_0) . dx$$

ومنه

$$\boxed{F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y) . dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y) . dy = c}$$

و هو الحل العام.

$$\boldsymbol{\frac{1}{x} . dy - \frac{y}{x^2} . dx = 0}$$

الحل:

نبرهن أنّها تامة:

$$\begin{cases} M(x,y) = -\dfrac{y}{x^2} \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = -\dfrac{1}{x^2} \\ N(x,y) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ومنه فالشرط محقق إذاً المعادلة تامة. والحل العام من الشكل: $F(x,y) = C$ لإيجاد الحل العام يجب إيجاد الدالة $F(x,y)$ ، لنأخذ:

$$F(x,y)=\int M(x,y)\,.dx+\varphi(y)=\int -\frac{y}{x^2}.\,dx+\varphi(y)=\frac{y}{x}+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{x}+\varphi'(y)=N(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{x}+\varphi'(y)=\frac{1}{x}\Rightarrow \varphi'(y)=0\ \Rightarrow\ \varphi(y)=c$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y)=\frac{y}{x}=C}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

$$\boldsymbol{(3x^2+6xy^2).dx+(6x^2y+4y^3).dy=0}$$

الحل:

نبرهن أنّها تامة:

$$\begin{cases} M(x,y)=3x^2+6xy^2 \ \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=12xy \\ N(x,y)=6x^2y+4y^3 \ \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x}=12xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

الشرط محقق إذاً المعادلة التفاضلية تامة ، والحل العام من الشكل: $F(x,y)=C$ لإيجاد الحل العام يجب إيجاد الدالة $F(x,y)$ ، لنأخذ:

$$F(x,y)=\int M(x,y)\,.dx+\varphi(y)$$

$$=\int (3x^2+6xy^2)\,.dx+\varphi(y)$$

$$=x^3+3x^2y^2+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=6x^2y+\varphi'(y)=N(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}=6x^2y+\varphi'(y)=6x^2y+4y^3\Rightarrow\ \varphi'(y)=4y^3\ \overset{\text{تكامل}}{\Longrightarrow}\ \varphi(y)=y^4$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4=C}$$

وهو الحل العام.

وظيفة سيتم ادراجها في المحاضرة القادمة ☺

اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

$$(x+y+1)\,dx+(x-y^2+3)\,dy=0$$

$$(4x-3y-y\sin x)\,dx+(\cos x-3x-\sin y)\,dy=0$$

$$(2x+3y+4)\,dx+(3x+4y+5)\,dy=0$$

$$(4x^3y^3-2xy)\,dx+(3x^4y^2-x^2)\,dy=0$$

انتهت المحاضرة