معك نحو

التخرج

# Syria Math Team

السنة الثانية

# البنى الجبرية1

## المحاضرة22

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء


للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

نظري

◄ دكتور المادة: فادي أبوحرب

◄ المحاضرة : الثانية والعشرون ◄ عنوان المحاضرة: مبرهنات

**مبرهنة (بدون برهان) :**

لتكن $H, K$ زمر دوارة منتهية ولنفرض ان $(H:1) = n \quad , \quad (K:1) = m$

الشرط اللازم و الكافي كي تكون $H \oplus K$ دوارة هو ان يكون $\gcd(m, n) = 1$

**تمهيدية( تعميم للمبرهنة):**

لتكن $G_i$ زمر دوارة منتهية حيث $1 \le i \le n$ الشرط اللازم و الكافي كي تكون زمرة الجداء المباشر

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \ \dots \oplus G_n$$

دوارة هو ان تكون $(G_1 : 1)\ , \ (G_i : 1)$ اعداد أولية فيما بينهما وذلك اياً كان $1 \le i, j \le n \ , i \ne j$

**نتيجة:** ليكن $m > 1$ عدداً صحيحاً يحقق:

$$m = n_1 . n_2 \dots n_t$$

عندئذٍ: $Z_m \cong Z_{n1} \oplus Z_{n2} \oplus . \dots \oplus Z_{nt}$

عندما وفقط عندما تكون الاعداد $n_i, n_j$ أولية فيما بينهما وذلك أيا كان $1 \le i, j \le n \ , i \ne j$

**مثال:**

$$Z_{30}, Z_6$$

$$Z_6 \cong Z_2 \oplus Z_3$$

$$Z_{30} \cong Z_5 \oplus Z_6$$

$$\cong Z_3 \oplus Z_{10}$$

$$\cong Z_{15} \oplus Z_2$$

$$Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_3 \oplus Z_5 \cong Z_2 \oplus Z_6 \oplus Z_5 \cong Z_2 \oplus Z_{30} \ncong Z_{60}$$

لان 10,6 ليس اوليان فيما بينهما.

**مبرهنة: (دون برهان):**

لتكن $s,t$ اعداد صحيحة موجبة بحيث $gcd(s,t)=1$ عندئذٍ:

1- $U(s.t) \cong U(s) \oplus U(t)$

2- $U_s(s.t) \cong U(t)$

3- $U_t(s.t) \cong U(s)$

**تمهيدية (دون برهان):**

ليكن $m>1$ عدداً صحيحاً يحقق:

$$m = n_1.n_2 \dots n_k$$

حيث: $gcd(n_i,m_j)=1$ من اجل: $1 \le i,j \le k \;,\; i \ne j$

عندئذٍ: $U(m) \cong U(n_1) \oplus U(n_2) \oplus \dots \oplus U(n_k)$

**مثال:**

$$U(105) \cong U(15) \oplus U(7)$$

$$\cong U(35) \oplus U(3)$$

$$\cong U(5) \oplus U(21) \cong U(5) \oplus U(7) \oplus U(3)$$

$$U_{15}(105) \cong U(7)$$

$$U_{35}(105) \cong U(3)$$

$$U(21) \cong U_5(105) = \{1,11,16,26,31,41,46,61,71,76,86,101\}$$

**مبرهنة:**

لتكن $k$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة $G_1$ و $H$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة $G_2$

عندئذٍ: $H \oplus k$ زمرة جزئية ناظمية في الزمرة $G = G_1 \oplus G_2$

## البرهان:

لنثبت الان ان: $\forall a \in G = G_1 \oplus G_2$

$$a. H \oplus k. a^{-1} \subseteq H \oplus k$$

ليكن: $(x, y) \in a. H \oplus k. a^{-1}$

ولنثبت ان $(x, y) \in H \oplus k$

لدينا: $(x, y) \in a. H \oplus k. a^{-1}$ عندئذٍ يوجد $(h, k) \in H \oplus k$

ونعلم ان $a \in G = G_1 + G_2$ بالتالي $a = (g_1, g_2)$

بحيث: $(x, y) = a. (h, k). a^{-1} = (g_1, g_2). (h, k). (g_1, g_2)^{-1}$

$$= (g_1, g_2). (h, k). (g_1^{-1}, g_2^{-1})$$

$$= (g_1. h. g_1^{-1}, g_2. k. g_2^{-1}) \in H \oplus k$$

ومنه $H \oplus k$ زمرة جزئية ناظمية في $G_1 \oplus G_2$

**انتهت المحاضرة**

إعداد: وئام النمر, ولاء الأخضر, أبرار الخالد