معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

البنى الجبرية1

المحاضرة20

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

◄ دكتور المادة: فادي أبوحرب

◄ المحاضرة : العشرون ◄ عنوان المحاضرة: مبرهنات

نظري

مبرهنة:

القضايا التالية صحيحة:

1- كل زمرة دوارة منتهية مرتبتها n تماثل Z_n

2- جميع الزمر الدوارة المنتهية التي لها نفس المرتبة متماثلة.

البرهان:

1- لتكن $G =< a >$ زمرة دوارة منتهية مرتبتها n عندئذٍ يوجد $a \in G$ بحيث $G =< a > = \{e, a, a^2 \dots a^{n-1}\}$

وهذه العناصر مختلفة مثنى مثنى.

ولنثبت ان G تماثل Z_n. لنعرف العلاقة: $\varphi : Z_n \longrightarrow G$ بالشكل: $\varphi(m) = a^m \ , \forall m \in Z_n$

لنثبت ان φ تطبيق متباين : $\forall x, y \in Z_n \ ; x = y$

$$x = y \Leftrightarrow a^x = a^y \Leftrightarrow \varphi\ (x) = \varphi\ (y)$$

لنثبت ان φ غامر

أياً كان $x \in G$ عندئذٍ يوجد $t \in Z_n$ بحيث $x = a^t$ أي: $\varphi\ (t) = a^t = x$

ومنه φ غامر. لنثبت ان φ تشاكل $\forall x, y \in Z_n$

$$\varphi\ (x, y) = a^{x+y} = a^x . a^y = \varphi\ (x) . \varphi\ (y)$$

ومنه φ تشاكل , مما سبق نجد ان φ تماثل وبالتالي $Z_n \cong G$

2- لنأخذ $\varphi_1 : Z_n \rightarrow G$

φ_1 تماثل حسب1

$$\varphi_2 : Z_n \rightarrow G'$$

ولنأخذ التماثل العكسي φ_2^{-1}

$$\varphi_2^{-1}: G' \to Z_n$$

$$\varphi_1 . \varphi_2^{-1}: G' \to G$$

وبالتالي جميع الزمر الدوارة المنتهية ذات المرتبة نفسها متماثلة.

مبرهنة: القضايا التالية صحيحة:

1- كل زمرة دوارة وغير منتهية تماثل الزمرة Z
2- جميع الزمر الدوارة غير المنتهية متماثلة.

البرهان :

1- كل زمرة دوارة وغير منتهية تماثل زمرة Z

لتكن $G =< a >$ زمرة دوارة غير منتهية, لنأخذ التطبيق: $f: Z \to G$

$$\forall n \in Z \to f(n) = a^n$$

لنثبت ان f تطبيق متباين غامر وتشاكل:

1) f تطبيق : $\forall x . y \in Z$

$$x = y$$

$$a^x = a^y$$

f تطبيق: $f(x) = f(y)$

وهذا يكافئ اثبات ان f متباين.

2) f تشاكل

$$\forall x . y \in Z$$

$$f(x \oplus y) = a^{x+y} = a^x . a^y = f(x) . f(y)$$

$\Leftarrow f$ تشاكل

3) f غامر

$$\forall z \in G;\ \exists n \in Z\ ; z = a^n$$

لنأخذ $f(n) = a^n = z$

$\Leftarrow f$ غامر

ومنه فإن $G \cong Z$ وهو المطلوب.

2- البرهان ينتج مباشرة من برهان 1.

مثال: ادرس وجود او عدم وجود تماثل بين الزمرة التالية:

$$U(5), Z_4\ , U(10)$$

البرهان:

$$U(5) = \{1,2,3,4\}$$

$$Z_4 = \{0,1,2,3\}$$

$$U(10) = \{1,3,7,9\}$$

نلاحظ ان: $(U(5):1) = (Z_4:1) = (U(10):1) = 4$

لنثبت انها دوارة : $Z_4 =< 1 >\ , U(5) =< 2 >$

$$U(10) =< 3 >$$

وحسب المبرهنة السابقة $Z_4 \cong U(10) \cong U(5)$

تمرين (وظيفة):

ادرس وجود او عدم وجود تماثل بين الزمرتين التاليتين:

$$U(12), U(10)$$

الجداء والمجموع المباشران لزمر:

1- الجداء المباشر لزمر:

ليكن $G_1, G_2, \dots G_n$ مجموعة منتهية من الزمر يعرف الجداء المباشر (الخارجي) للزمر السابقة على انه المجموعة:

$$\{(g_1, g_2, \dots g_n); g_1 \in G_i\ ; 1 \le i \le n\}$$

والذي سوف نرمز له ب $G_1 \oplus G_2 \oplus \quad \dots . \oplus G_n$

أي ان $G_1 \oplus G_2 \oplus \quad \dots . \oplus G_n = \{(g_1, g_2, \dots g_n); g_1 \in G_i\ ; 1 \le i \le n\}$

تمهيدية: ليكن $G_1, G_2, \dots G_n$ مجموعة منتهية من الزمر , الجداء المباشر هو زمرة بالنسبة للعملية (.) المعرفة كمايلي:

$$\forall (a_1, a_2 .., a_n), (b_1, b_2, \dots b_n) \in G_1 \oplus G_2 \oplus \dots . \oplus G_n$$

فإن: $(a_1, a_2 .., a_n).(b_1, b_2, \dots b_n) = (a_1 . b_1, a_2 . b_2, \dots a_n . b_n)$

والحيادي هو: $(e_1, e_2 .. e_n)$

ومقلوب العنصر : $(a_1, a_2 .., a_n)$ هو $(a_1^{-1}, a_2^{-2}, \dots a_n^{-1})$

شرط التجميعي.

تمرين: لنأخذ الزمرتين: $U(8), U(10)$

اوجد الجداء المباشر لهاتين الزمرتين ثم اوجد $(3,9).(3,3) \wedge (3,7).(7,9)$

$$U(8) = \{1,3,5,7\}$$

$$U(10) = \{1,3,7,9\}$$

$$\boldsymbol{U(8) \oplus U(10)} = \{(\mathbf{1},\mathbf{1}), (\mathbf{1},\mathbf{3}), (\mathbf{1},\mathbf{7}), (\mathbf{1},\mathbf{9}), (\mathbf{3},\mathbf{1}), (\mathbf{3},\mathbf{3}), (\mathbf{3},\mathbf{7}), (\mathbf{3},\mathbf{9}), (\mathbf{5},\mathbf{1}), (\mathbf{5},\mathbf{3}), (\mathbf{5},\mathbf{7}), (\mathbf{5},\mathbf{9}), (\mathbf{7},\mathbf{1}), (\mathbf{7},\mathbf{3}), (\mathbf{7},\mathbf{7}), (\mathbf{7},9)\}$$

$$(3,7).(7,9) = \underbrace{3.7}_{mod 8}, \underbrace{7.9}_{mod\ 10} = (5,3)$$

انتهت المحاضرة

إعداد: وئام النمر, ولاء الأخضر, أبرار الخالد