معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثالثة

البنى الجبرية 3

المحاضرة 12

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0997378154

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

◄ دكتور المادة: بشار الحسين

◄ المحاضرة : الثانية عشر

مبرهنة : إذا كانت $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0 \ldots\ldots(3)$ متتالية تامة فإن القضيتين متكافئتان :

1- المتتالية (3) منشطرة من اليمين
2- $Kerg$ حد مكمل مباشر في N

البرهان :

$(1) \Leftarrow (2)$ لنفرض أن المتتالية (3) منشطرة من اليمين وليكن $\pi: \rho \to N$ تشاكل منشطر بحيث :

$$go\pi = I_P \ldots\ldots(*)$$

من جهة ثانية $\forall n \in N$

$$g(n - (\pi og)(n)) = g(n) - g(\pi og(n))$$

$$g(n) - (go\pi)(g(n))$$

من $(*) \Leftarrow g(n) - I_P \,.\, g(n) = g(n) - g(n) = 0$

$$\Rightarrow g(n - (\pi og)(n)) = 0$$

$$n - (\pi og)(n) \in Kerg$$

ومن ثم إن :

$$(\pi og)(n) = \pi(g(n)) \in Im\pi$$

$$\Rightarrow n \in Im\pi + Kerg$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{N = Im\pi + Kerg}$$

لإثبات أن المجموع مباشر يجب برهان

$$Im\pi \cap Kerg = \{0\}$$

$$x \in Im\pi \cap Kerg$$

أي $x \in Im\pi \ \exists p \in P : \pi(p) = x$

$$x \in Kerg \quad : g(x) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) \overset{\pi(p)=x}{\cong} g(\pi(p)) = (go\pi)(p) = I_P(p) = p$$

$$\Rightarrow p = 0 \Rightarrow \pi(0) = x \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow Im\pi \cap Keg = 0$$

$$\Rightarrow N = Im\pi \oplus Kerg$$

$(2) \Leftarrow (1)$ لنفرض أن $Kerg$ حد مكمل مباشر في N عندئذ يوجد $A \subseteq N$ مودول جزئي من N

بحيث : $N = Kerg \oplus A$ من اجل $n \in N$ فإن n تكتب على شكل وحيد

$$x \in Kerg \ : \ a \in A$$

$$n = x + a \dots\dots (1)$$

لنأخذ g_A مقصور التشاكل المودولي g على A

نصور (1) ب g :

$$g(n) = g(x + a) = g(x) + g(a) = g(a)$$

ونبرهن أن g_A تماثل

بما أن g غامر فإن g_A غامر

و g_A متباين وذلك لانه إذا كان $a \in Kerg_A$ ومنه $g_A(a) = 0$

$$\Rightarrow a \in Kerrg$$

وبما ان $a \in A$ فإن $a \in A \cap Kerg$ كون N تكتب على شكل مجموع مباشر لمودولين A

و $Ker\ g$

$$N = A \oplus Kerg$$

$$\Rightarrow a = 0$$

فإن g_A متباين

وهو تشاكل مودولي عندئذ :

$$g_A : A \to P$$

تماثل مودولي بحيث $g_A o g_A^{-1} = I_A$ وكون (3) تامة و g غامر فإنه يوجد دوما تشاكل :

$$\pi : P \to N$$

بحيث يحقق $\pi(p) = g_A^{-1}(p) \;\; ; \;\; \forall p \in P$

$$(go\pi)(p) = g\big(\pi(p)\big)$$

$$= g\left(g_A^{-1}(p)\right) = I_p(P) = P$$

$$go\pi = I_P$$

ومنه فإن π تشاكل منشطر فإن المتتالية (3) منشطرة من اليمين

تعريف: ليكن M_1, M_2 مودوليين جزئيين من المودول M على الحلقة R وليكن $M = M_1 \oplus M_2$ عندئذ $\forall m \in M$ فغنه يكتب بالشكل الوحيد :

$$m = m_1 + m_2 \;\; : \;\; m_1 \in M_1, m_2 \in M_2$$

ونسمي التطبيق

$$P : M \to M_1$$

$$m \mapsto m_1$$

الاسقاط على M_1 موازي ل M_2

تعريف : ليكن M مودولا على الحلقة R نقول عن التشاكل $f : M \to M$ أنه جامد إذا كان $fof = f$

مبرهنة : إذا كان $M = M_1 \oplus M_2$ (حيث M مودول على حلقة R وحيث M_1, M_2 مودولين جزئيين من M)

وكان $f : M \to M_1$ إسقاط M_1 موازٍ ل M_2 فإن القضايا الآتية صحيحة :

1- $M_1 = Imf = \{x \in M : f(x) = x\}$

2- $M_2 = Kerf$

3- f جامد

1) إن $Imf = M_1$ من التعريف ويجب إثبات أن

$$M_1 = Imf = \left\{\underbrace{x \in M: f(x)}_{A} = x\right\}$$

أي علينا إثبات أن $M_1 \subseteq A$ و $A \subseteq M_1$

$$\forall m_1 \in M_1 \,;\;\; m_1 = m_1 + 0$$

$$\Longrightarrow f(m_1) = m_1$$

$$\Longrightarrow m_1 \in \{x \in M; f(x) = x\}$$

$$\Longrightarrow M_1 \subseteq \{x \in M \,; f(x) = x\}$$

$$\Longrightarrow M_1 = Im\, f = \{x \in M : f(x) = x\}$$

2) $\forall m \in M$ فإن m يكتب بشكل وحيد :

$$m = m_1 + m_2; m_1 \in M_1 \,, m_2 \in M_2$$

$$f(m_2) = 0$$

$$\Longrightarrow m_2 \in Ker\, f$$

$$M_2 \subseteq Ker\, f$$

$$\Longrightarrow \text{إما } x = 0 \;\in M_2$$

$$\Longrightarrow \text{أو } x = 0 + m_2 \in M_2$$

$$Ker\, f \;\subseteq M_2$$

إذا $Kerf = M_2$

3) $\forall m \in M$ فYن $f(m) = m_1$ وبالتالي فإن

$$(fof)m = f\big(f(m)\big) = f(m) = m_1 = f(m)$$

إذا $fof = f$ أي انه جامد ..