◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الخامسة عشر ◄ عنوان المحاضرة: قاعدة ليجاندر

تتمة خواص التكامل البيتاوي:

2) خاصية تغيير الوسيط:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

لكن نلاحظ أن $x^{p-1}dx = d\left(\frac{x^p}{p}\right)$ فالتكامل البيتاوي يكتب بالشكل :

$$B(p,q)=\int_0^1 (1-x)^{q-1}\,d\frac{x^p}{p}$$

نكامل بالتجزئة:

بفرض $u=(1-x)^{q-1} \quad \Leftarrow \quad du=-(q-1)(1-x)^{q-2}$

$$dv=d\frac{x^p}{p} \quad \Leftarrow \quad v=\frac{x^p}{p}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^{q-1}\,d\frac{x^p}{p}=\left[(1-x)^{q-1}.\frac{x^p}{p}\right]_0^1+\frac{q-1}{p}\int_0^{1^-} x^p(1-x)^{q-2}\,dx$$

نلاحظ أن $\left[(1-x)^{q-1}.\frac{x^p}{p}\right]_0^1=0$

ومنه:

$$B(p,q)=\int_0^1 (1-x)^{q-1}\,d\frac{x^p}{p}=\frac{q-1}{p}\int_0^{1^-} x^p(1-x)^{q-2}\,dx$$

في الحقيقية يمكن أن نكتب ما يلي:

$$x^p=x^{p-1}-x^{p-1}+x^p=x^{p-1}-x^{p-1}(1-x)$$

نعوض بالتكامل:

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\,dx-\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p}[B(p,q-1)-B(p,q)]$$

$$B(p,q)+\frac{q-1}{p}B(p,q)=\frac{q-1}{p}B(p,q-1)$$

بإخراج $B(p,q)$ عامل مشترك من اليسار

$$B(p,q)\left(1+\frac{q-1}{p}\right)=\frac{q-1}{p}B(p,q-1)$$

$$\frac{p+q-1}{p}B(p,q)=\frac{q-1}{p}B(p,q-1)$$

نضرب الطرفين بـ $\frac{p}{p+q-1}$ فنجد :

$$\boxed{B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)}$$

نطبق نفس الدستور لحساب $B(p,q-1)$ فنجد:

$$B(q,p)=\frac{q-1}{p+q-1}\cdot\frac{q-2}{p+q-2}\cdot B(p,q-2)$$

بالمتابعة و بوضع $p=m$ و $q=n$ (حيث n,m أعداد طبيعية) نصل إلى أن :

$$B(m,n)=\frac{n-1}{m+n-1}\cdot\frac{n-2}{m+n-2}\dots\frac{1}{m+1}B(m,1)\dots(*)$$

و لكن:

$$B(m,1)=\int_0^1 x^{m-1}\,dx=\left[\frac{x^m}{m}\right]_0^1=\frac{1}{m}$$

نعوض في $(*)$:

$$(m,n)=\frac{(n-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\dots(m+1)m}$$

لنضرب البسط و المقام بـ$(m-1)!$

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)+(m+n-2)\ldots m(m-1)!}$$

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

ومنه:

$$B(p,q)=\frac{(p-1)!\,(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

3) خاصية تغيير المتحول:

نفرض $x=\frac{y}{1+y}$

$$dx=\frac{1+y-y}{(1+y)^2}=\frac{1}{(1+y)^2}$$

$$1-x=1-\frac{y}{1+y}=\frac{1+y-y}{1+y}=\frac{1}{1+y}$$

كما نقوم بتغيير حدود التكامل لأننا قمنا بتغيير المتحول:

$$x=0\Longrightarrow y=0$$

$$x=1\Longrightarrow y\longrightarrow\infty$$

$$B(p,q)=\int_0^\infty\left(\frac{y}{1+y}\right)^{p-1}.\left(\frac{1}{1+y}\right)^{q-1}.\frac{1}{(1+y)^2}\,dy$$

$$\boxed{B(p,q)=\int_0^\infty\frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy}$$ حفظ

وهو تكامل معتل من النوع الأول وللتكامل قيمة فقط عندما $q=1-p$ أي $p+q=1$

وقيمته هي:

$$\boxed{B(p\,,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}\quad \text{حيث}\quad 1>p>0}$$ حفظ

مثال:

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi$$

4) الشكل المثلثي للتكامل البتاوي:

نضع $\quad dx=-2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \Leftarrow x=\cos^2\varphi$

نغير حدود التكامل:

$$x=0\Longrightarrow\varphi=0$$

$$x=1\Longrightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$1-\mathrm{x}=1-\cos^2\varphi=\sin^2\varphi$$

نعوض بالتكامل:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx$$

فيصبح:

$$B(p,q)=-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^{2p-1}\varphi\;\sin^{2q-1}\varphi\;d\varphi$$

$$\boxed{\Longrightarrow B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\,.\sin^{2q-1}\varphi\;d\varphi}$$

حفظ

تكامل أولر من النوع الثاني: التكامل الغماوي

يعرف تكامل أولر من النوع الثاني والذي رمزه $\Gamma(p)$ بأنه التكامل المعتل:

$$\Gamma(p)=\int_{0^+}^{\infty}e^{-x}.x^{p-1}\,dx$$

وهو يمثل تابعاً يتعلق بوسيط واحد (أي يتبع لمتغير واحد) هو p

ويسمى هذا التكامل بالتكامل الغماوي يكتب اختصاراً بالشكل:

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty}e^{-x}.x^{p-1}\,dx$$

وتجدر الإشارة إلى أن هذا التكامل لا يكون موجوداً إلا إذا كان $p > 0$
وذلك بملاحظة الآتي:

$$\Gamma(p) = \underbrace{\int_{0^+}^{1} e^{-x}.x^{p-1}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} e^{-x}.x^{p-1}\,dx}_{I_2}$$

حيث التكامل I_2 موجود دوماً مهما يكن p بينما I_1 يمثل تكاملاً معتلاً من النوع الأول عندما $p-1<0$ وهو موجود $p > 0$.

بعض خواص التكامل الغماوي:

1) تكامل بالتجزئة: $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}.x^{p-1}\,dt$

بفرض: $u = e^{-x} \Leftarrow du = -e^{-x}\,dt$, $dv = x^{p-1}\,dt \Leftarrow v = \frac{x^p}{p}$

$$\Gamma(p) = [u.v]_0^\infty - \int_0^\infty v\,du$$

$$\Gamma(p) = \left[e^{-x}.\frac{x^p}{p}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}.\frac{x^p}{p}\,dt$$

$$\Gamma(p) = \left[e^{-x}.\frac{x^p}{p}\right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x}.x^p\,dt$$

إلا أن : $\left[e^{-x}.\frac{x^p}{p}\right]_0^\infty = \lim_{b\to\infty}\frac{e^{-b}b^p}{p} = 0$

$$\Rightarrow \Gamma(p) = \frac{1}{p}\underbrace{\int_0^\infty e^{-x}.x^p\,dt}_{\Gamma(p+1)}$$

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\Gamma(p+1)$$

$$\boxed{\Rightarrow \Gamma(p+1) = p\Gamma(p)}$$

و إننا لو كررنا العملية السابقة عدداً منتهياً من المرات سنحصل على :

$$\boxed{\Gamma(p+1) = p(p-1)(p-2)\dots(p-n)\ \ \Gamma(p-n)}$$

نأخذ p قيمة بين عددين طبيعيين متتاليين:

$$n < p < n+1$$

$$\Rightarrow 0 < p - n < 1$$

و لنناقش حالة إذا كان $p = n$ عدد صحيح موجب , فحسب ما سبق يكون :

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1.\Gamma(1)$$

إلا أن:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dt = [-e^{-x}]_0^\infty = 1$$

$$\boxed{\Rightarrow \Gamma(\mathrm{n}+1) = \mathrm{n}!}$$

-2 نفرض $t = x^2$

ومنه $at = 2xdx$

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx$$

شكل اخر لغماوي.

العلاقة بين التكامل الغماوي و البتاوي:

مبرهنة:

إذا كان p , q عددين موجبين فإن التكامل البتاوي :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(\mathrm{p}).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

مثال: $B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

كذلك $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$$

قاعدة ليجاندر

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}.\Gamma(2p)$$

الإثبات:

لدينا

$$B(p,p)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1}\,dx=\int_0^1 (x-x^2)^{p-1}\,dx$$

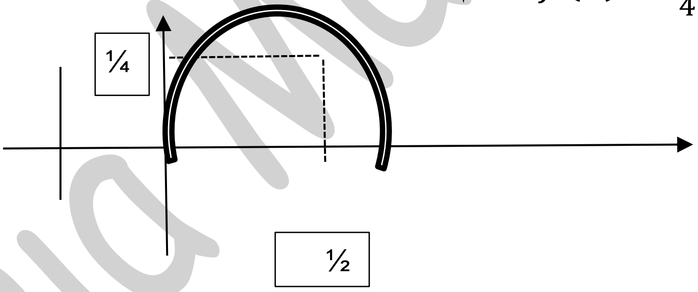
نقوم بالإتمام إلى مربع كامل حيث

$$(x-x^2)=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$$

بالعودة للتكامل السابق و التعويض :

$$B(p,p)=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}\,dx$$

و لما كان التابع $f(x)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$ يرسم قطعاً مكافئاً فإنه يكون متناظراً بالنسبة لمحور تناظره $x=\frac{1}{2}$



$$B(p,p)=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{p-1}\,dx$$

نفرض $\quad \frac{1}{4}t=\left(\frac{1}{2}-x\right)^2$

أو:

$$\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

نفاضل الطرفين:

$$\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\,dt=-dx$$

$$\Longrightarrow dx = -\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

بالتعويض بالتكامل:

$$B(p,p) = -2\int_1^0 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}t\right)\right]^{p-1} \cdot \left(-\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\right)\,dt$$

$$= -2\int_1^0 \frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}t\right]^{p-1}\,dt$$

$$= -2\int_1^0 \frac{1}{4}t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(1-t)\right]^{p-1}\,dt$$

$$= -\frac{2.1}{4}\int_1^0 t^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4}(1-t)\right]^{p-1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 t^{-\frac{1}{2}}.(1-t)^{p-1}.\frac{1}{4^{p-1}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^{p-1}}\int_1^0 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{2p-2}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$\Longrightarrow B(p,p) = \frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,dt$$

العلاقة بين تكاملي أولر حيث: $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

هنا:

$$B(p,p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(p+p)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{1}{2^{2p-1}}B\left(-\frac{1}{2}+1\,,p-1+1\right)$$

$$= \frac{1}{2^{p-1}}B\left(\frac{1}{2},p\right)$$

لقد حصلنا على $B\left(\frac{1}{2},p\right)$ من الأسس حيث $t^{-\frac{1}{2}}$ أسه $-\frac{1}{2}$ نضيف له واحد فيصبح $\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$ وحصلنا على الـp من أس $(1-t)^{p-1}$ نضيف للأس واحد فيصبح $p=1+1-p$ ولذلك $B\left(\frac{1}{2},p\right)$

ومنه:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(p)}{\Gamma(2p)}=\frac{1}{2^{2p-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{2p-1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)\Gamma(2p)$$

$$\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{2p-1}}\Gamma(p)\Gamma(2p)$$

حيث $\sqrt{\pi}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ كما حسبناه بالمحاضرة السابقة.

ومنه:

$$\boxed{\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\Gamma(2p)}$$

((عندما يتراكم عليك كل شيء وتصل الى نقطة لا تتحمل بعدها أي شيء ، احذر أن تستسلم ففي هذه النقطة سيتغير قدرك إلى الأبد))

انتهت المحاضرة