نظري

◄ دكتور المادة: يحيى قطيش

◄ المحاضرة: الرابعة عشر ◄ عنوان المحاضرة: التكاملات المعتلة

يمكن ان نكامل تكامل النوع الأول المعتل بالتجزئة:

تمرين :

أوجد قيمة التكامل : $n \in N$: $I_n = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$

نكامل بطريقة التجزئة إذ نفرض :

$$u = t^n \quad \Rightarrow \quad du = nt^{n-1}dt$$
$$dv = e^{-t}dt \quad \Rightarrow v = -e^{-t}$$

فيكون :

$$I_n = \underbrace{[-t^n e^{-t}]_0^\infty}_{=0} + n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt$$

و لحساب التكامل الأخير أيضاً نطبق طريقة التكامل بالتجزئة إذ نفرض :

$$u = t^{n-1} \Rightarrow du = (n-1)t^{n-2}dt$$
$$dv = e^{-t}dt \Rightarrow v = -e^{-t}$$

و بالتالي يكون :

$$I_n = n\left(\underbrace{[-t^{n-1}e^{-t}]_0^\infty}_{0} + (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}dt\right) = n(n-1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}dt$$

فنلاحظ أنه في البداية وصلنا إلى أن :

$$I_n = nI_{n-1}$$

و من ثم وجدنا أن :

$$I_n = n(n-1)I_{n-2}$$

لذا نكمل بطريقة التجزئة إلى أن نصل إلى :

$$I_n = n(n-1)(n-2)\dots .2.1 I_0 = n!\underbrace{\left(\int_0^\infty e^{-t}dt\right)}_{=0} = \boxed{n!}$$

ذلك من تحقق

حيث $\int_0^\infty e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$

التكاملات المعتلة من النوع الثاني:

ليكن $f(x)$ تابع معرف على $]a,b]$ ونأخذ الشكل: $\qquad I = \int_{a^+}^b f(x)\,dx$

حيث: $f(x)$ غير محدد عند النقطة $x = a$ أي:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

اذا يكون التكامل معتل عند النقطة $x = a$ ونسميها النقطة الشاذة للتابع $f(x)$ ونكتب:

$$\int_a^b f(x)dx = lim_{\varepsilon\to a}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = A$$

- اذا كانت A قيمة موجودة ومحدودة نقول ان التكامل I (متقارب).
- اما اذا كانت $A = \pm\infty$ او غير موجودة نقول عن التكامل I (متباعد)

بصورة مماثلة: نجد انه اذا كان $f(x)$ معرف على المجال $[a,b[$ وقيمة $f(x)dx$ غير محددة عند $x = b$

$$lim_{x\underset{\to}{<}b} f(x) = \pm\infty$$

نكتب التكامل المعتل عند b بالشكل:

$$I = \int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx = lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a^+}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = B$$

- اذا كانت B موجودة ومحدودة يكون التكامل متقارب وإلا فهو متباعد.

كذلك يمكن ان نكتب التكامل بالشكل:

$$I=\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx=\int_{a^+}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{b^-} f(x)\,dx$$

حيث : $a<c<b$

اذا كانت $f(x)$ معرف على $[a,b]$, $a<c<b$ و c نقطة شاذة ل $f(x)$ نكتب:

$$I=\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx=\int_{a^+}^{c^-} f(x)\,dx+\int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

يمكن ان يكون تكامل معتل مختلط بين النوع الأول والثاني:

$$I=\int_{a^+}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{a^+}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

حيث: $a<c<+\infty$

يمكن ان تستخدم معايير التقارب السابقة المستخدمة على التكاملات المعتلة من النوع الأول على التكاملات المعتلة من النوع الثاني مع مراعاة حدود التكامل.

مثال : ادرس تقارب التكامل : $s>0$: $I=\int_{0^+}^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$

الحل :

نلاحظ أن $x=0$ نقطة شاذة لأنه عندما تكون $0<s<1$ سيصبح الأس سالب وعندها تكون x في المقام ومنه $x=0$ تعدم المقام فهي نقطة شاذة.

و أن التكامل المعطى يكتب بالشكل :

$$I=\int_{0^+}^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx=\int_{0^+}^{1} e^{-x}x^{s-1}dx+\int_{1}^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$$

وجدنا في المحاضرة السابقة أن التكامل $\int_1^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$ متقارب لأنه لو طبقنا معيار نهاية النسبة للتكامل السابق مع التكامل $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ فنجد :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}x^{s-1}}{1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{s+1}}{e^x}=0$$

و لما كان التكامل $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ متقارب يكون التكامل $\int_1^{\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$ متقارباً

بقي لكي يتقارب التكامل المعطى أن ندرس تقارب تكامل $\int_{0+}^{1}e^{-x}x^{s-1}dx$ كما يلي :

لنضع $x=\frac{1}{u}$ عندئذٍ $dx=-\frac{du}{u^2}$ كما أن $x=0\Rightarrow u=\infty$ و $x=1\Rightarrow u=1$

$$\int_{0+}^{1}e^{-x}x^{s-1}dx=-\int_{\infty}^{1}e^{-\left(\frac{1}{u}\right)}\left(\frac{1}{u}\right)^{s-1}\frac{du}{u^2}=\int_{1}^{\infty}e^{-\left(\frac{1}{u}\right)}u^{-s-1}du$$

إن التابع المكامل هنا يكتب بالشكل $\frac{1}{e^{\frac{1}{u}}\ u^{s+1}}$ و لنطبق نعيار نهاية النسبة مع التكامل $\int_1^{\infty}\frac{1}{u^{s+1}}du$ فنجد أن

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\frac{1}{e^{\frac{1}{u}}\ u^{s+1}}}{\frac{1}{u^{s+1}}}=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{u}}}=1>0:$$

و لما كان التكامل $\int_1^{\infty}\frac{1}{u^{s+1}}du$ متقارباً ((من الشكل $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx:p>1$)) فإن

التكامل $\int_1^{\infty}e^{-\left(\frac{1}{u}\right)}u^{-s-1}du$ متقارب

مما سبق نخلص إلا أن التكامل $I=\int_{0+}^{\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$ متقارب.

التكاملات الاولرية:

◄ **تكامل أولر من النوع الأول ((التكامل البتاوي)):**

تعريف: نسمي التكامل المعتل $B(p,q)=\int_{0+}^{1^-}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

تكامل أولر من النوع الأول أو التكامل البتاوي و هو يمثل تابع يتعلق بوسيطين (أي يتبع لمتغيرين) هما $p\,,q$

التابع $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ معرف على $]0,1[$ نكتب:

$$B(p,q)=\int_{0^+}^{a}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx+\int_{a}^{1^-}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

بفرض $0<a<1$.

باستخدام معيار نهاية النسبة $lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}}=1>0$

$$lim_{x\overset{<}{\to}1}\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1-x)^{q-1}}=1>0$$

نحسب التكامل: $\int_{0^+}^{a} x^{p-1}dx = \left[\frac{x^p}{p}\right]_0^a = \frac{a^p}{p}$

له قيمة عندما $p > 0$ بالتالي التكامل الأول $B(p,q)$ متقارب من اجل $p > 0$

وثم نحسب: $\int_a^{-1}(1-x)^{q-1}dx = \left[-\frac{(1-x)^q}{q}\right]_a^{-1} = \frac{(1-a)^q}{q}$

فقط عندما $q > 0$ يكون متقارب بالتالي التكامل الثاني $B(p,q)$ يكون متقارب عندما $q > 0$

خواص التكامل البتاوي:

1) خاصة التناظر:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

بتغيير المتحول:

$$t = 1 - x \Rightarrow x = 1 - t$$
$$dt = -dx$$

وبتغيير حدود التكامل:

$$x = 0 \Rightarrow t = 1 \quad , \quad x = 1 \Rightarrow t = 0$$

والآن نعوض

$$B(p,q) = -\int_1^0 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt$$
$$= \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt = B(q,p)$$
$$\Rightarrow \boxed{B(p,q) = B(q,p)}$$

انتهت المحاضرة