معك نحو

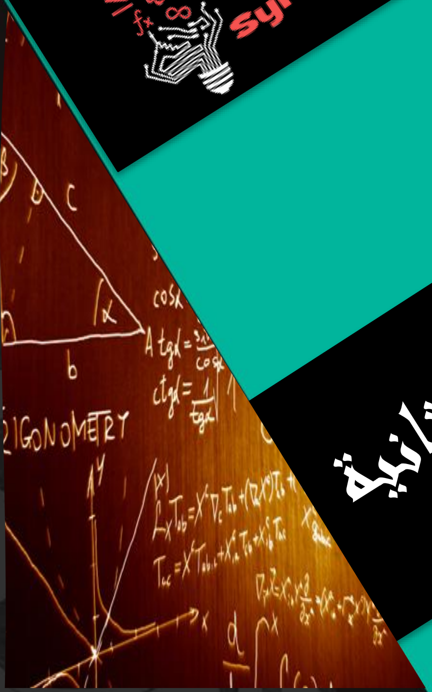
التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

معادلات تفاضلية1

المحاضرة 9



تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2019-2023

◄ دكتور المادة: خليل يحيى

نظري

◄ المحاضرة: التاسعة ◄ عنوان المحاضرة: عوامل التكميل

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1-عوامل التكميل

تعريف: اذا لم تكن المعادلة التفاضلية :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

تامة فاننا نوجد دالة $\mu = \mu(x,y)$ اذا ضربنا بها طرفي المعادلة :

$$\mu(x,y) * M(x,y)dx + \mu(x,y) * N(x,y)dy = 0$$

فتصبح تامة .

عندئذ نسمي الدالة : $\mu = \mu(x,y)$ بعامل التكميل.

وبالتالي يكون لدينا:

$$\frac{d\mu(x,y) * M(x,y)}{dy} = \frac{d\mu(x,y) * N(x,y)}{dx}$$

وللاختصار نكتب : M, N, μ:

$$\boxed{M\frac{d\mu}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} = N\frac{d\mu}{dx} + \mu\frac{dN}{dx}}$$

- ومنه اذا كان μ تابع ل x فقط أي: $\mu = \mu(x)$

$$\Longrightarrow M\frac{d\mu}{dy} - N\frac{d\mu}{dx} = \mu\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right)$$

و بالتالي : $-N\frac{d\mu}{dx} = \mu\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right)$

$$\frac{\frac{d\mu}{dx}}{\mu}=\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N}$$

نرمز: $\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N}=\Psi(x)$

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N}\,dx$$

$$\ln|\mu|=\int\Psi(x)dx$$

$$\Rightarrow\boxed{\mu=e^{\int\Psi(x)dx}}$$

عامل التكميل للمعادلة التفاضلية.

- أما اذا كان μ تابع ل y فقط: $\mu=\mu(y)$

$$M\frac{d\mu}{dy}=\mu\left[\left(\frac{dN}{dx}\right)-\left(\frac{dM}{dy}\right)\right]$$

$$\frac{\frac{d\mu}{dy}}{\mu}=\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{-M}$$ حيث :

$$\Rightarrow\mu=e^{\int\Psi(y)dy}$$

حيث : $\Psi(y)=\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{-M}$

تمارين:

أوجد الحل العام للمعادلة الاتية:

$$(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$$

الحل:

$$\left.\begin{array}{r} M(x,y) = 1 - x^2y \Rightarrow \dfrac{dM}{dy} = -x^2 \\ N(x,y) = x^2y - x^3 \Rightarrow \dfrac{dN}{dx} = 2xy - 3x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dx}$$

و بالتالي المعادلة غير تامة.....اذا لنوجد عامل التكميل....

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2(y-x)} = \left(-\frac{2xy(y-x)}{(x^2(y-x)}\right) = \frac{-2}{x} \Rightarrow \mu = e^{\int \frac{-2}{x}dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{x^2}}$$

نضرب طرفي المعادلة التفاضلية ب μ ونوجد الحل العام :

$$(x^{-2} - yy)dx + (y - x)dy = 0$$

نلاحظ أن : $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$

وبالتالي المعادلة التفاضلية تامة .... اذا لنوجد الحل العام:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y)$$

$$= \int (x^{-2} - y)dx + \varphi(y)$$

$$= -\frac{1}{x} - yx + \varphi(y) \Rightarrow \frac{dF}{dy} = -x + \varphi'(y) = y + x$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = y \Rightarrow \varphi(y) = \frac{1}{2}y^2$$

الحل العام هو:

$$\boxed{F(x,y)=\frac{-1}{x}-yx+\frac{1}{2}y^2=c}$$

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$(x^2+y^2+x)dx+xy\,dy=0$$

الحل:

$$\frac{dM}{dy}=2y\neq\frac{dN}{dx}=y$$

و منه المعادلة غير تامة......لنوجد عامل التكامل....-->

$$\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N}=\frac{2y-y}{xy}=\frac{1}{x}\Rightarrow\mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}$$

$$\Rightarrow\boxed{\mu=x}$$

و هو عامل التكميل.

فتصبح المعادلة التفاضلية:

$$(x^3+xy^2+x^2)dx+x^2y\,dy=0$$

نلاحظ أن: $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}$

ومنه المعادلة تامة......الأن لنوجد الحل العام:

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)$$

$$=\int x^3+xy^2+x^2+\varphi(y)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{3}x^3+\varphi(y)$$

$$\frac{dF}{dy}=x^2y+\varphi'(y)=N(x,y)$$

$$\Rightarrow x^2y+\varphi'(y)=x^2y\Rightarrow\varphi'(y)=0\Rightarrow\varphi(y)=c$$

اذا الحل العام هو:

$$\boxed{F(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2} + x^2y^2 + \frac{1}{3}x^3 = c}$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الأتية:

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$$

الحل:

$$M(x,y) = 2xy^4e^y + 2xy^3 + y \Longrightarrow \frac{dM}{dy} = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1$$

$$N(x,y) = x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x \Longrightarrow \frac{dN}{dx} = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3$$

نلاحظ أن: $\frac{dN}{dx} \neq \frac{dM}{dy} \Longleftarrow$ ومنه المعادلة غير تامة ..

ولنوجد عامل التكامل أو (التكميل) :

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{-M} = \frac{8xy^3e^y + 8xy^2 + 4}{-2xy^4e^y - 2xy^3 - y} = \frac{4}{-y}$$

$$\Longrightarrow \mu = e^{\int -\frac{4}{y}dy} \Longrightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{y^4}}$$

نضرب المعادلة التفاضلية ب μ :

$$(2xe^y + 2xy^{-1} + y^{-3})dx + (x^2e^y - x^2y^{-2} - 3xy^{-4})dy = 0$$

نلاحظ أن: $\frac{dN}{dx} = \frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{dy}}$

و منه المعادلة تامة ....اذا لنوجد الحل العام:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y)$$

$$= \int (2xe^y + 2xy^{-1} + y^{-3})dx + \varphi(y)$$

$$= x^2e^y + x^2y^{-1} + xy^{-3} + \varphi(y)$$

$$\Longrightarrow \frac{dF}{dy} = x^2e^y - x^2y^{-2} - 3xy^{-4} + \varphi'(y) = x^2e^y - x^2y^{-2} - 3xy^{-4}$$

$$\Longrightarrow \varphi'(y) = 0 \Longrightarrow \varphi(y) = c$$

ومنه فالحل العام يكون:

$$\boxed{F(x,y) = x^2e^y + x^2\frac{1}{y} + \frac{x}{y^3} = c}$$

انتهت المحاضرة