معك نحو

التخرج

Syria Math Team

السنة الثانية

البنى الجبرية1

المحاضرة19

تطلب من مكتبة ماهر للخدمات الطلابية – جانب بناء الفيزياء

للتواصل :

هاتف – واتساب : 0991921144

مجموعة الفيسبوك: Syria Math 2nd year

نظري

◄ دكتور المادة: فادي أبو حرب

◄ المحاضرة : التاسعة عشر ◄ عنوان المحاضرة: التماثلات الزمرية

مصطلحات : ((هامة من اجل المحاضرات القادمة))

$f : G \longrightarrow G'$ تطبيق:

1- f تشاكل $(homomor\ phism)$
2- f تشاكل متباين $(monomor\ phism)$
3- f تشاكل غامر $(Epomor\ phism)$
4- f تشاكل متباين و غامر $(isomor\ phism)$
5- f تشاكل و $G = G'$ $(Endomor\ phism)$
6- f تماثل $G = G'$ $(Automor\ phism)$

التماثلات الزمرية:

مبرهنة التماثل الأولى :

ليكن $f \ : G \longrightarrow G'$ تشاكلاً زمرياً عندئذٍ:

1- $G/kerf \cong Imf$
2- اذا كان f غامراً $G/kerf \cong G'$

البرهان:

- لنعرف العلاقة $\emptyset : G/kerf \longrightarrow Imf$

$$g.kerf \longmapsto \emptyset(g.kerf) = f(g)$$

لنثبت ان $\emptyset$ تطبيق وتشاكل ومتباين و غامر.

اولاً: لنثبت ان $\emptyset$ تطبيق أي:

$$\forall x.kerf , y.kerf \in G/kerf$$

بحيث: $x.kerf = y.kerf$ ولنثبت ان $\emptyset(x.kerf) = \emptyset(y.kerf)$

$$x.kerf = y.kerf$$

$$x.kerf.y^{-1}kerf = y.kerf.y^{-1}kerf$$

$$x.y^{-1}kerf = yy^{-1}kerf$$

$$x.y^{-1}kerf = kerf$$

$$x.y^{-1} \in kerf$$

$$f(x.y^{-1}) = e'$$

ولكن f تشاكل $f(x).f(y^{-1}) = e'$

$$f(x).(f(y))^{-1} = e'$$

نضرب ب $f(y)$: $\qquad f(x) = f(y)$

$$\emptyset(x.kerf) = \emptyset(y.kerf)$$

ومنه $\emptyset$ تطبيق.

- لنثبت الآن ان $\emptyset$ تشاكل:

$$\forall x.kerf\,, y.kerf \in G/kerf$$

$$\emptyset\,\underbrace{[(x.kerf)(y.kerf)]}_{L_1} = \emptyset\,\underbrace{(x.kerf).\emptyset(y.kerf)}_{L_2}$$

$$L_1 = \emptyset(x.ykerf) = f(x.y)$$

$$= f(x).f(y) = \emptyset(x.kerf).\emptyset(y.kerf) = L_2$$

لنثبت انه متباين:

$$\forall x.kerf\,; y.kerf \in G/kerf$$

بحيث: $\emptyset(x.kerf) = \emptyset(y.kerf)$

ونريد اثبات ان $x.kerf = y.kerf$

$$\emptyset(x.kerf) = \emptyset(y.kerf)$$

$$f(x) = f(y)$$

$$f(x).(f(y))^{-1} = e'$$

نضرب ب$(f(y))^{-1}$

$$f(x.y^{-1}) = e'$$

أي $x.y^{-1} \in kerf$

$$xkerf = ykerf$$

حسب الخاصة: $aH = bH \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ ومنه $\emptyset$ متباين.

لنثبت ان $\emptyset$ غامر:

ليكن $Z \in Imf$ عندئذٍ يوجد $x \in G$ بحيث $f(x) = Z$

ولكن $f(x) = \emptyset(x.kerf)$ ومنه $\emptyset(x.kerf) = f(x) = Z$

وبالتالي $\emptyset$ غامر .. مماسبق نجد ان $\emptyset$ تماثل ومنه $G/kerf \cong Imf$

** بما ان f غامر فإن $Imf = G'$ وحسب * فإن $G/kerf \cong G'$

مبرهنة التماثل الثانية: (بدون برهان)

لتكن G زمرة و k, H زمرتين جزئيتين من G اذا كانت الزمرة الجزئية k ناظمية في G عندئذٍ:

$$Hk/k = kH/k =< H \cup k >/k \cong H/H \cap k$$

$$f: H \longrightarrow Hk/k$$

مبرهنة التماثل الثالثة:

لتكن G زمرة و k, H زمرتين جزئيتين ناظميتين في G فإن $k \subseteq H$ عندئذٍ : $\frac{G/k}{H/k} \cong G/H$

مبرهنة: (وظيفة)

ليكن $n > 1$ عدداً صحيحاً عندئذٍ:

$$Z/4Z \cong Z4$$

الحل:

لنعرف: $f: Z \to Z_n$

$$\forall x \in Z : x = y \Longrightarrow x\, modn = y\, modn$$

ومنه f تطبيق.

$$f(x.y) = x.y mod\, n$$

$$= (x\, mod\, n)(y\, mod\, n) = f(x).f(y)$$

ومنه f تشاكل.

ليكن: $y \in Z_n$ ومنه $y \in Z$

$$\Longrightarrow f(y) = y\, mod\, n = y$$

ومنه f غامر

وحسب مبرهنة التماثل الأولى نجد ان $\frac{Z}{kerf} \cong Z_n$

حيث يتم الطلب لنثبت ان $kerf = nZ$

ليكن: $x \in kerf$

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = x\, mod\, n = 0 \Longrightarrow x = n.a : a \in Z$$

العدد x من مضاعفات n أي $x \in nZ \Longrightarrow kerf \subseteq nZ$

الاحتواء المعاكس:

ليكن: $x \in nZ \Longrightarrow x = n.a : a \in Z$

$$f(x) = f(x.a) = n.a\, mod\, n = 0$$

$$\Longrightarrow x \in kerf \Longrightarrow nZ \subseteq kerf$$

$$nZ = kerf$$

ومنه $\frac{Z}{nZ} \cong Z_n$

انتهت المحاضرة

إعداد: وئام النمر ولاء الأخضر أبرار الخالد