الفصل الثاني:

التوابع المتزايدة و التوابع المتناقصة

بين مجموعتين مرتبتين

2-1- التابع المتزايد والتابع المتناقص بين مجموعتين مرتبتين:

2-1-1. تعريف:

لتكن $(A,\leq_1),(B,\leq_2)$ مجموعتين مرتبتين، نقول عن التابع
$f:(A,\leq_1)\to(B,\leq_2)$
إنه **متزايد** إذا و فقط إذا كان:

$$\forall\, x,y\in A:\ \left(\ x\ \leq_1 y\ \Rightarrow\ \ f(x)\leq_2 f(y)\ \right)$$

و نقول عنه إنه **متناقص** إذا و فقط إذا كان:

$$\forall\, x,y\in A:\ \left(\ x\ \leq_1 y\ \Rightarrow\ \ f(x)\geq_2 f(y)\ \right)$$

أي كان

$$\forall\, x,y\in A:\ \left(\ x\ \leq_1 y\ \Rightarrow\ \ f(y)\leq_2 f(x)\ \right)$$

2-1-2. نتيجة:

$f:(A,\leq_1)\to(B,\leq_2)$ متزايد $\Leftrightarrow$ $f:(A,\leq_1)\to(B,\geq_2)$ متناقص.

2-1-3. مثال:

إذا كانت $(B,\leq_2)=(A,\leq_1)=(\mathbb{R},\leq)$، فإنه يكون التابع
$f:(A,\leq_1)\to(B,\leq_2)$
متزايد إذا و فقط إذا كان متزايداً بالمعنى التحليلي المألوف.

تمرين (1)

لتكن A مجموعة ما غير خالية، و لتكن $\emptyset\neq B\subset A$ ، أثبت أن التابع التالي متزايد

$$f_B:(P(A),\subset)\to(P(A),\subset)$$
$$X\mapsto f_B(X)=B\cap X$$

تمرين (2)

لتكن A مجموعة ما غير خالية، أثبت أن التابع التالي متناقص

$$g : (P(A), \subset) \to (P(A), \subset)$$
$$X \mapsto g(X) = A \setminus X$$

تمرين (3)

ليكن التابعان المعرفان كما يلي

$$f : (\mathbb{R}, \leq) \to (P(\mathbb{R}), \subset) \quad ; \quad a \mapsto f(a) =]-\infty, a[$$

$$g : (\mathbb{R}, \leq) \to (P(\mathbb{R}), \subset) \quad ; \quad a \mapsto g(a) =]a, +\infty[$$

أثبت أن f متزايد بينما g متناقص.

تمرين (4)

ليكن $f : A \to B$ تابع ما، أثبت أن كل من التابعين التاليين متزايد

$$\vec{f} : (P(A), \subset) \to (P(B), \subset)$$
$$X \mapsto \vec{f}(X) := \{f(x) : x \in X\}$$

$$\overleftarrow{f} : (P(B), \subset) \to (P(A), \subset)$$
$$Y \mapsto \overleftarrow{f}(Y) := \{x \in A : f(x) \in Y\}$$

2-2- المجموعات الدنيا (down-sets) و المجموعات العليا (up-sets)

2-2-1. تعريف:

لتكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة، و لتكن $B \subset A$، سندعو المجموعة B مجموعة دنيا في المجموعة المرتبة $(A, \leq)$ إذا حققت الشرط التالي:

$$\forall x \in B, \forall y \in A \ : \ (y \leq x \Rightarrow y \in B)$$

أي

$$(x \in B) \wedge (y \in A) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (y \in B)$$

وسنقول عن المجموعة B إنها عليا في المجموعة المرتبة $(A, \leq)$ إذا كانت دنيا في المجموعة المرتبة $(A, \geq)$.

2-2-2. ملاحظة:

من التعريف السابق نستنتج أن المجموعة الخالية هي مجموعة دنيا وعليا (حسب جبر المنطق وكون الاقتضاء $p \Rightarrow q$ يكون صحيحاً إذا كانت القضية p خاطئة)، و بالتالي كل مجموعة مرتبة ستحوي مجموعتين دنيَتين على الأقل هما $\emptyset, A$.

تمرين (5)

ما هي المجموعات الدنيا و المجموعات العليا في المجموعة المرتبة $(\mathbb{R}, \leq)$ ؟

تمرين (6)

أوجد جميع المجموعات الدنيا و المجموعات العليا في المجموعة المرتبة $(P(\{1,2,3\}), \subset)$ ؟

تمرين (7)

1- أثبت أن تقاطع مجموعتين دنيتين هو مجموعة دنيا.
2- أثبت أن اجتماع مجموعتين دنيتين هو مجموعة دنيا.
3- أثبت أن تقاطع مجموعتين عليتين هو مجموعة عليا.
4- أثبت أن اجتماع مجموعتين عليتين هو مجموعة عليا.

3-2- المجموعات الدنيا الأساسية (Principal down-sets)

1-3-2. تعريف:

لتكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة، نعرِّف المجموعة الدنيا الأساسية المقابلة للعنصر $x \in A$ بأنها

$$x^{\downarrow} := \{\, y \in \mathrm{A} : \mathrm{y} \leq x\}$$

وبشكل مشابه نعرِّف المجموعة الدنيا الأساسية المقابلة للعنصر $x \in A$ بأنها

$$x^{\uparrow} := \{\, y \in \mathrm{A} : \mathrm{x} \leq y\}$$

من الواضح أن كل مجموعة دنيا أساسية هي مجموعة دنيا (حسب تعريف المجموعة الدنيا)، كما أن كل مجموعة عليا أساسية هي مجموعة عليا (حسب تعريف المجموعة العليا).

لكن العكس غير صحيح بالضرورة، فقد تكون المجموعة الدنيا ليست دنيا أساسية، مثال ذلك المجموعة الدنيا التالية $]-\infty, a[$ في المجموعة المرتبة $(\mathbb{R}, \leq)$.

كما أن تقاطع مجموعتين دنيتين أساسيتين ليس بالضرورة مجموعة دنيا أساسية، وكذلك اجتماع مجموعتين دنيتين أساسيتين ليس بالضرورة مجموعة دنيا أساسية، و التمرين التالي يبين ذلك

تمرين (8)

لتكن المجموعة المرتبة $(\{x,y,z,t\},\leq)$، المعرفة بالعلاقات

$$x \leq z, \qquad x \leq t, \qquad y \leq z, \qquad y \leq t$$

1- أوجد $x^{\downarrow}, y^{\downarrow}, z^{\downarrow}, t^{\downarrow}$.
2- أوجد $z^{\downarrow} \cap t^{\downarrow}$, $x^{\downarrow} \cup y^{\downarrow}$.
3- هل كل من المجموعتين $z^{\downarrow} \cap t^{\downarrow}$, $z^{\downarrow} \cup t^{\downarrow}$ دنيا أساسية ؟ ماذا تستنتج؟

تمرين (9)

أثبت أنه إذا كانت المجموعة B دنيا في المجموعة المرتبة $(A,\leq)$ و كان $x \in B$ فإن $x^{\downarrow} \subset B$.

تمرين (10)

أثبت أنه في أي مجموعة مرتبة $(A,\leq)$، ومن أجل كل $x,y \in A$ فإن

$$x^{\downarrow} = y^{\downarrow} \;\Leftrightarrow\; x = y$$

2-3-2. مبرهنة:

لتكن $(A,\leq_1),(B,\leq_2)$ مجموعتين مرتبتين، و ليكن $f : A \to B$ تابع ما، عندئذٍ الشروط الثلاث التالية متكافئة:

1- التابع $f : (A,\leq_1) \to (B,\leq_2)$ متزايد.
2- الصورة العكسية وفق $f : (A,\leq_1) \to (B,\leq_2)$ لأي مجموعة دنيا أساسية هي مجموعة دنيا.
3- الصورة العكسية وفق $f : (A,\leq_1) \to (B,\leq_2)$ لأي مجموعة عليا أساسية هي مجموعة عليا.

الإثبات:

$$(\mathbf{1}) \Rightarrow (\mathbf{2})$$

لنفرض أن التابع $f:(A,\leq_1) \to (B,\leq_2)$ متزايد، و لتكن $y^{\downarrow}$ مجموعة دنيا أساسية في B، ولنبرهن أن

$$\overleftarrow{f}(y^{\downarrow}) = \{\, x \in A : f(x) \in y^{\downarrow}\}$$

مجموعة دنيا في A.

$$(z \in A) \wedge \left(x \in \overleftarrow{f}(y^{\downarrow})\right) \wedge (z \leq x) \Rightarrow \left(f(x) \in y^{\downarrow}\right) \wedge (z \leq x)$$

$$\Rightarrow (f(x) \leq y) \wedge (z \leq x)$$

$$\Rightarrow \left(f(z) \leq f(x)\right) \wedge \left(f(x) \leq y\right)$$

$$\Rightarrow f(z) \leq y$$

$$\Rightarrow f(z) \in y^{\downarrow}$$

$$\Rightarrow z \in \overleftarrow{f}(y^{\downarrow}).$$

$(2) \Rightarrow (1)$

لنفرض أن الصورة العكسية وفق $f : (A, \leq_1) \to (B, \leq_2)$ لأي مجموعة دنيا أساسية هي مجموعة دنيا، و لنبرهن أن f متزايد، أي لنفرض أن

$$\forall\, y \in B : \;\; (x \in A) \wedge (x \leq z) \wedge \left(z \in \overleftarrow{f}(y^{\downarrow})\right) \Rightarrow x \in \overleftarrow{f}(y^{\downarrow})$$

و لنبرهن أن

$$x \leq_1 y \;\; \Rightarrow \;\; f(x) \leq_2 f(y)$$

أي لنبرهن أن

$$x \in y^{\downarrow} \;\; \Rightarrow \;\; f(x) \in f(y)^{\downarrow}$$

أي لنبرهن أن

$$x \in y^{\downarrow} \;\; \Rightarrow \;\; x \in \overleftarrow{f}\left(f(y)^{\downarrow}\right)$$

أي لنبرهن أن

$$y^{\downarrow} \subset \overleftarrow{f}\left(f(y)^{\downarrow}\right)$$

وهذا ينتج من كون المجموعة $\overleftarrow{f}\left(f(y)^{\downarrow}\right)$ دنيا و $y \in \overleftarrow{f}\left(f(y)^{\downarrow}\right)$.

$(1) \Rightarrow (3)$

لنفرض أن التابع $f : (A, \leq_1) \to (B, \leq_2)$ متزايد، و بالتالي فإن التابع

$$f : (A, \geq_1) \to (B, \geq_2)$$

متزايد، و بالتالي (حسب $1 \Rightarrow 2$) فإن الصورة العكسية وفق $f : (A, \geq_1) \to (B, \geq_2)$ لأي مجموعة دنيا أساسية هي مجموعة دنيا، أي أن الصورة العكسية وفق

$$f : (A, \leq_1) \to (B, \leq_2)$$

لأي مجموعة عليا أساسية هي مجموعة عليا.

$\mathbf{(3) \Rightarrow (1)}$

لنفرض أن الصورة العكسية وفق $f : (A, \leq_1) \to (B, \leq_2)$ لأي مجموعة عليا أساسية هي مجموعة عليا، و بالتالي فإن الصورة العكسية وفق $f : (A, \geq_1) \to (B, \geq_2)$ لأي مجموعة دنيا أساسية هي مجموعة دنيا، و بالتالي (حسب $2 \Rightarrow 1$) فإن التابع

$$f : (A, \geq_1) \to (B, \geq_2)$$

متزايد، ومنه فالتابع

$$f : (A, \leq_1) \to (B, \leq_2)$$

متزايد. ■