/ /

**5** أحسب التكامل: $\int_C f(z)\,dz$ حيث $f(z)=\bar{z}$ و $C: |z|=1$ دائرة الوحدة.

**الحل:**

$$\int_C f(z)\,dz$$

$$C: |z|=1 \iff z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$\Rightarrow \bar{z}=\cos\theta-i\sin\theta \quad ; 0\le\theta\le 2\pi$$

$$dz=(-\sin\theta+i\cos\theta)\,d\theta$$

$$\int_C f(z)\,dz=\int_0^{2\pi}(\cos\theta-i\sin\theta)(-\sin\theta+i\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(-\sin\theta\cos\theta+i\cos^2\theta+i\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} i\,[\cos^2\theta+\sin^2\theta]\,d\theta=\int_0^{2\pi} i\,d\theta$$

$$\Longrightarrow \int_C f(z)\,dz=[i\theta]_0^{2\pi}=2i\pi$$

**7** أثبت أن $\left|\int_C \frac{e^{iz}}{z^2-1}\,dz\right|\le\frac{12\pi}{5}e^{2}$ حيث $C$ هو المنحني: $|z|=\frac{3}{2}$.

**الحل:**

نود الاعتماد على المبرهنة التي تنص على أنه:

"إذا كان $f(z)$ تابعاً محدوداً بحيث $|f(z)|\le M$ عندما تقع $z$ على طريق $\gamma$ وكان طول هذه الطريق يساوي $L$ عندئذ:

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|\le L.M$$

الطريق هنا هي المنحني: $C: |z|=\frac{3}{2}$ أي الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $\frac{3}{2}$.

إن طول الطريق $C$ هو محيط الدائرة ويساوي: $2\pi r$

$$\Longrightarrow L=2\pi\left(\tfrac{3}{2}\right)\iff \boxed{L=3\pi}$$

ولنوجد $M$:

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2-1}$$

من ناحية،

$$|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{-y+ix}| = e^{-y}$$

ولكن $-\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$ لأنها تحول على الدائرة C

$$\Rightarrow +\frac{3}{2} \geq -y \geq -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{3}{2}} \geq e^{-y} \Rightarrow \boxed{e^{-y} \leq e^{2}}$$

ومن ناحية أخرى،

$$|z^2-1| \geq |z^2| - |1|$$

$$\geq |z|^2 - 1$$

$$|z^2-1| \geq \frac{9}{4} - 1$$ حيث $|z| = r = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow |z^2-1| \geq \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|z^2-1|} \leq \frac{4}{5}$$

إذا نجد أن،

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{iz}}{z^2-1}\right| \leq \frac{4}{5} \cdot e^{2}$$

إذا: $M = \frac{4}{5}e^{2}$ وبهذا يكون حسب المبرهنة

$$\left|\int_C f(z) \cdot dz\right| \leq L \cdot M$$

$$\leq 3\pi \cdot \frac{4}{5} e^{2}$$

$$\boxed{\left|\int_C f(z) \cdot dz\right| \leq \frac{12\pi}{5} e^{2}} \Longleftarrow$$

/ /

المحاضرة الخامسة عشرة    الأربعاء 4/2/2012

حل تمارين ومسائل:

1 أحسب : $\int_\gamma (z^2-1)^{-1}\,dz$ حيث :

$\gamma(t)=1+e^{it} \quad ; \quad 0\le t\le 2\pi$

الحل:

$$\int_\gamma (z^2-1)^{-1}\,dz=\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}\,dz$$

$$f(z)=\frac{1}{z^2-1}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-1}$$

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz=\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z-1}\,dz-\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z+1}\,dz$$

$$\gamma : z(t)=z=1+e^{it}$$

$$dz=i\cdot e^{it}\,dt \quad ; \quad 0\le t\le 2\pi$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{i\cdot e^{it}}{e^{it}}\,dt-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{i\cdot e^{it}}{2+e^{it}}\,dt$$

$$(2+e^{it})'=ie^{it} \ , \ (e^{it})'=i\cdot e^{it}$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz=\frac{1}{2}\left[\ln e^{it}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\left[\ln(2+e^{it})\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\left[it\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\left[\ln[2+e^{i2\pi}]-\ln[2+e^{0}]\right]$$

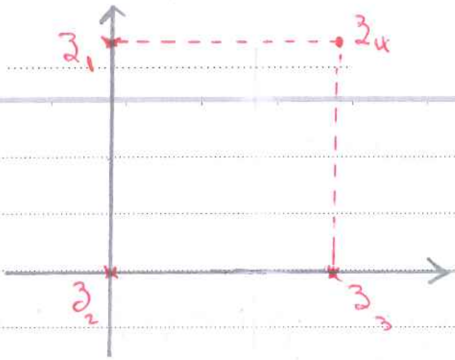
$$e^{i(2\pi)}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz=i\pi-\frac{1}{2}\left\{\ln(3)-\ln(3)\right\}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_\gamma f(z)\,dz=i\pi}$$

2 أحسب التكامل : $\int_\gamma \bar{z}\,dz$ حيث $\gamma$ هو مربع رؤوسه

النقاط : $z_1=2i \ , \ z_2=0 \ , \ z_3=2 \ , \ z_4=2+2i$




الحل:

نلاحظ أن الطريق $\gamma$ هي عبارة عن أربع طرق متتالية: $\gamma_1$، $\gamma_2$، $\gamma_3$، $\gamma_4$ لذا وحسب المبرهنة يكون:

$$\int_{\gamma} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

$\gamma_1$ : $z_1 z_2$

وهو طريق معادلته: $x=0$

$$z = iy$$
$$dz = i.dy$$
$$\bar{z} = -iy$$

وحدود التكامل من $y=0 \longleftarrow y=2$

$\gamma_2$ : $z_2 z_3$ وهو طريق معادلته: $y=0$

$$\bar{z} = z = x \Longrightarrow dz = dx ,$$

وحدود التكامل من $x=2 \longleftarrow x=0$

$\gamma_3$ : $z_3 z_4$ وهو طريق معادلته: $x=2$

$$z = 2+iy$$
$$dz = i.dy$$
$$\bar{z} = 2-iy$$

وحدود التكامل من $y=2 \longleftarrow y=0$

$\gamma_4$ : $z_4 z_1$ وهو طريق معادلته: $y=2$

$$z = x+2i$$
$$\bar{z} = x-2i$$
$$dz = dx$$

وحدود التكامل من $x=0 \longleftarrow x=2$

/ /

وبهذا يكون التكامل المطلوب :

$$\int_\gamma \bar{z}\cdot dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

$$= \int_2^0 -i.y.i\,dy + \int_0^2 x.dx + \int_0^2 (2-iy).i.dy + \int_2^0 (x-2i)dx$$

$$= \int_2^0 y.dy + \int_0^2 x.dx + \int_0^2 (2i+y).dy + \int_2^0 (x-2i).dx$$

$$= \left[\tfrac12 y^2\right]_2^0 + \left[\tfrac12 x^2\right]_0^2 + \left[2iy+\tfrac12 y^2\right]_0^2 + \left[\tfrac12 x^2 - 2ix\right]_2^0$$

$$= 0 - \tfrac12(4) + \tfrac12(4) - 0 + 4i + \tfrac12(4) - 0 + 0 - \tfrac12(4) + 4i$$

$$= -\cancel{2} + \cancel{2} + 4i + \cancel{2} - \cancel{2} + 4i$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \bar{z}\cdot dz = 4i$$

$\boxed{3}$ أحسب التكامل : $\int_\gamma z.\operatorname{Im} z^2.dz$

حيث $\gamma = \{|z|=1 \,;\, -\pi \le \theta \le 0\}$

أي $\gamma$ هي الطريق المثلة لنصف الدائرة الواحدية العلوي باتجاه عقارب الساعة.

الحل :

$$\gamma : z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$z^2 = e^{2i\theta} = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

$$\operatorname{Im} z^2 = \sin 2\theta$$

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$dz = (-\sin\theta + i\cos\theta).d\theta \;;\; -\pi \le \theta \le 0$$

$$\int_\gamma z.\operatorname{Im} z^2.dz = \int_{-\pi}^0 (\cos\theta + i\sin\theta)(\sin 2\theta).(-\sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^0 (-\sin\theta\cos\theta + i\cos^2\theta - i\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta)(\sin 2\theta).d\theta$$

$$\Rightarrow \int_\gamma = \int_{-\pi}^0 (i(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2\sin\theta\cos\theta)(\sin 2\theta).d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^0 (i\cos 2\theta - \sin 2\theta)(\sin 2\theta).d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^0 (i\sin 2\theta\cos 2\theta - \sin^2 2\theta).d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \left( \frac{i}{2} \sin 4\theta - \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4\theta \right] \right) . d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \left( \frac{i}{2} \sin 4\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\theta \right) . d\theta$$

$$= \frac{i}{2} \int_{-\pi}^{0} \sin 4\theta . d\theta - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{0} d\theta + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{0} \cos 4\theta . d\theta$$

$$= \frac{i}{8} \int_{-\pi}^{0} 4 . \sin 4\theta . d\theta - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{0} d\theta + \frac{1}{8} \int_{-\pi}^{0} 4 . \cos 4\theta . d\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} = \frac{i}{8} \left[ -\cos 4\theta \right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2} \left[ \theta \right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{8} \left[ \sin 4\theta \right]_{-\pi}^{0}$$

$$= \frac{i}{8} \left[ -\cos 0 + \cos(-4\pi) \right] - \frac{1}{2} \left[ 0 + \pi \right] + \frac{1}{8} \left[ \sin 0 - \sin(-4\pi) \right]$$

$$= \frac{i}{8} \left[ -\cancel{1} + \cancel{1} \right] - \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{8} \left[ 0 - 0 \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\gamma} z . \operatorname{Im} z^2 . dz = -\frac{\pi}{2}}$$

## تعريف النقاط الشاذة لتابع عقدي

نعلم أن التابع $w = f(z)$ التحليلي في المنطقة $D$ هو تابع قابل للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة $D$ ولكن يمكن أن يوجد في المنطقة $D$ عدد محدود من النقاط: $z_1, z_2, \dots, z_n$ يكون فيها التابع غير تحليلياً. نطلق عادة على مثل هذه النقاط اسم: "النقاط الشاذة للتابع $f(z)$" ونقول في هذه الحالة أن التابع $w = f(z)$ تحليلي في المنطقة $D$ باستثناء النقاط الشاذة: $z_1, z_2, \dots, z_n$ ، وإذا كانت المنطقة $D$ غير محدودة يمكن عندئذ أن يكون عدد النقاط الشاذة غير محدوداً.

إن تعيين النقاط الشاذة لتابع معروض في المنطقة $D$ يتم بتعيين النقاط التي يكون فيها التابع غير معرّف أو غير مستمر أو غير قابل للاشتقاق.

## مثال:

نلاحظ أن النقطة: $z = 0$ هي نقطة شاذة بالنسبة للتوابع التالية،

$f(z) = \frac{1}{z^4}$ ، $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ، $f(z) = e^{\frac{2}{z}}$ ، $f(z) = z \cos \frac{2}{z}$

كما أن النقطة: $z = i$ هي نقطة شاذة بالنسبة للتابع: $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$

/ /

أما التابع : $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ فهو يمتلك عدداً غير منتهي من النقاط الشاذة

حيث : $\sin\frac{1}{z}=0$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{z}=2\pi K$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{z=\frac{1}{2\pi K}}$$

## أنواع النقاط الشاذة :

1 - نقاط شاذة معزولة بالنسبة للتابع : $w=f(z)$

2 - نقاط شاذة غير معزولة.

## النقاط الشاذة المعزولة :

تقسم هذه النقاط إلى ما يلي :

1 - نقطة شاذة قابلة للحذف.

2 - الأقطاب.

3 - نقطة شاذة أساسية.

4 - نقاط التفرع.

5 - النقاط الشاذة في اللانهاية.

وسنفصل هذا الموضوع في مقرر «تحليل عقدي 2»

/ /

المحاضرة السادسة عشرة الإثنين 10/12/2012

تمرين (1)

قدّر التكامل التالي:

$$\int_\gamma \frac{z^2-1}{z^3-z+1}\,dz \quad ; \gamma = 2e^{it}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

الحل:

نعلم أن $\begin{cases} |a-b| \geq |a|-|b| \\ |a+b| \leq |a|+|b| \end{cases}$

لدينا:

$$f(z) = \frac{z^2-1}{z^3-z+1}$$

$$|z^2-1| \leq |z^2|+|-1|$$

$$\leq |z|^2+1 \qquad z = 2e^{it} \Rightarrow |z| = 2$$

$$\leq 4+1$$

$$\Rightarrow \boxed{|z^2-1| \leq 5} \quad (1)$$

$$|z^3-z+1| = |z^3-(z-1)| \geq |z^3|-|z-1|$$

$$\Rightarrow |z^3-z+1| \geq |z|^3-|z|-|1|$$

$$\geq 8-2-1$$

$$\Rightarrow |z^3-z+1| \geq 5 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{|z^3-z+1|} \leq \frac{1}{5}} \quad (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$|f(z)| = \left|\frac{z^2-1}{z^3-z+1}\right| \leq \frac{5}{5} = 1 = M$$

وحسب المبرهنة: "إذا كان $f(z)$ تابعاً محدوداً بحيث $|f(z)| \leq M$

عندما تقع $z$ على طريق $\gamma$ طوله $L$ عندئذٍ: $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq L.M$ "

إذاً وبما أن الطريق $\gamma$ هي الدائرة: $z = 2e^{it}$ التي نصف قطرها 2

إذاً طول الطريق $\gamma$ هو: $L = 2\pi r = 4\pi$

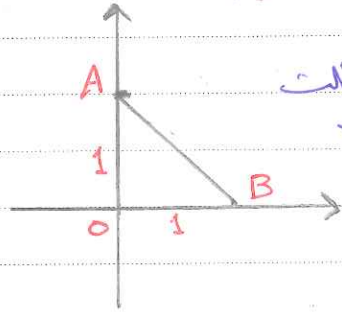
وبهذا يكون:

$$\left|\int_\gamma \frac{z^2-1}{z^3-z+1}\,dz\right| \leq 4\pi$$

تمرين (2):

قيم ((قدّر)) التكامل التالي: $\int_\gamma \frac{z^2+1}{z^3+1}$

حيث $\gamma$ هو الطريق من $A$ ← $B$ الموضح بالشكل،




الحل:

نلاحظ أن الطريق $\gamma$ ما هي إلا وتر المثلث القائم $\hat{AOB}$ إذاً طول الطريق $\gamma$ حسب فيثاغورث:

$$L=\sqrt{(1)^2+(1)^2} \Longrightarrow \boxed{L=\sqrt{2}}$$

ولدينا:

$$f(z)=\frac{z^2+1}{z^3+1}$$

$$|f(z)|=\left|\frac{z^2+1}{z^3+1}\right|$$

لدينا كسر بسطه أصغر من مقامه حيث $z^2 \leq z^3$ لأن $z$ تقع على الطريق $\gamma$ وبالتالي هي مقدار موجب.

إذاً المقدار هو أصغر من الواحد إذاً:

$$|f(z)|=\left|\frac{z^2+1}{z^3+1}\right| \leq 1 = M$$

وبهذا يكون حسب المبرهنة:

$$\left|\int_\gamma \frac{z^2+1}{z^3+1}\,dz\right| \leq \sqrt{2}$$

تمرين (3):

أحسب التكامل: $\int_C \frac{dz}{(z-a)^{n+1}}$

حيث $C$ هو محيط دائرة مركزها $a$ ونصف قطرها $r$ وحيث $n$ هو عدد صحيح.

/ /

الحل:

إن معادلة الدائرة التي مركزها $a$ ونصف قطرها $r$ هي ،

$$z-a=re^{i\theta} \Rightarrow z=re^{i\theta}+a$$

بالاشتقاق:

$$dz=ire^{i\theta}\cdot d\theta \quad ; \quad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

نعوض في التكامل:

$$\int_c \frac{dz}{(z-a)^{n+1}}=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}}{(re^{i\theta}+a-a)^{n+1}}d\theta=\int_0^{2\pi} i\cancel{r}\cancel{e^{i\theta}}\cdot\frac{d\theta}{r^{n+\cancel{1}}\,e^{i(n+1)\theta}}$$

$$=\int_0^{2\pi} i\cdot\frac{d\theta}{r^n\cdot e^{in\theta}}=\int_0^{2\pi}\frac{i}{r^n}\cdot e^{-in\theta}\cdot d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_c\frac{dz}{(z-a)^{n+1}}=\int_0^{2\pi}\frac{i}{r^n}\cdot e^{-in\theta}\cdot d\theta}$$

ونميز حالتين:

عندما $n=0$ نجد: $1=r^n$

$$\int_c\frac{dz}{(z-a)}=\int_0^{2\pi} i\cdot e^{-i(0)\theta}\cdot d\theta=\int_0^{2\pi} i\cdot d\theta$$
$$=[i\theta]_0^{2\pi}=2i\pi$$

عندما $n\neq 0$ نجد:

$$\int_c\frac{dz}{(z-a)^{n+1}}=\int_0^{2\pi}\frac{i}{r^n}e^{-in\theta}\cdot d\theta=\frac{-1}{nr^n}\int_0^{2\pi}-in\cdot e^{-in\theta}\cdot d\theta$$

$$=-\frac{1}{nr^n}\left[e^{-in\theta}\right]_0^{2\pi}$$
$$=-\frac{1}{nr^n}\left[e^{-in(2\pi)}-e^{0}\right]$$
$$=-\frac{1}{nr^n}\left[\cos 2n\pi-i\sin 2n\pi\right]+\frac{1}{nr^n}$$

بما أن $n$ عدد صحيح إذاً $2\pi n$ عدد صحيح من الدورات

$$\cos 2\pi n=\cos 0=1$$

$$\sin 2\pi n=\sin 0=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_c\frac{dz}{(z-a)^{n+1}}=-\frac{1}{nr^n}+\frac{1}{nr^n}=0}$$

/ /

# المنطقة البسيطة الاتصال
# والمنطقة متعددة الاتصال

**تعريف:**

يكون المنحني $C$ الذي معادلته،

$$z(t) = x(t) + i\,y(t)$$

منحنياً بسيطاً مغلقاً إذا كان كل من: $x(t)$، $y(t)$ تابعين للمتحول الحقيقي $(t)$ مستمرين في المجال المغلق $[a, b]$ حيث،

$$z(a) = z(b)$$

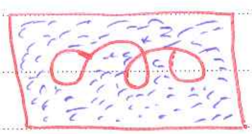
أي إذا كان طرفا المنحني منطبقان.

«المنحني البسيط المغلق هو المنحني المغلق الذي لا يتقاطع مع نفسه مثل الدائرة، المثلث، ...»

**تعريف:**

تكون المنطقة $D$ بسيطة الاتصال إذا كانت تحوي جميع النقاط الواقعة داخل أي منحني بسيط مغلق وجميع نقاط هذا المنحني.
وبهذا نجد أن النقاط الواقعة داخل دائرة أو مربع أو مثلث أو مضلع ما تشكل منطقة بسيطة الاتصال. وحدود المساحة والتي هي نقاط المنحني تشكل مجموعة مغلقة.

وبالعكس فإن كل منطقة غير بسيطة الاتصال تسمى منطقة متعددة الاتصال.



وتحدد المنطقة المتعددة الاتصال بمنحنيين بسيطين أو أكثر.

/ /

## أمثلة وتمارين :

1 عيّن المنطقة التي يكون فيها التابع :

$$w = f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-2)}$$

تحليلياً وحدد نوعها ثم مثلها بيانياً :

**الحل :**

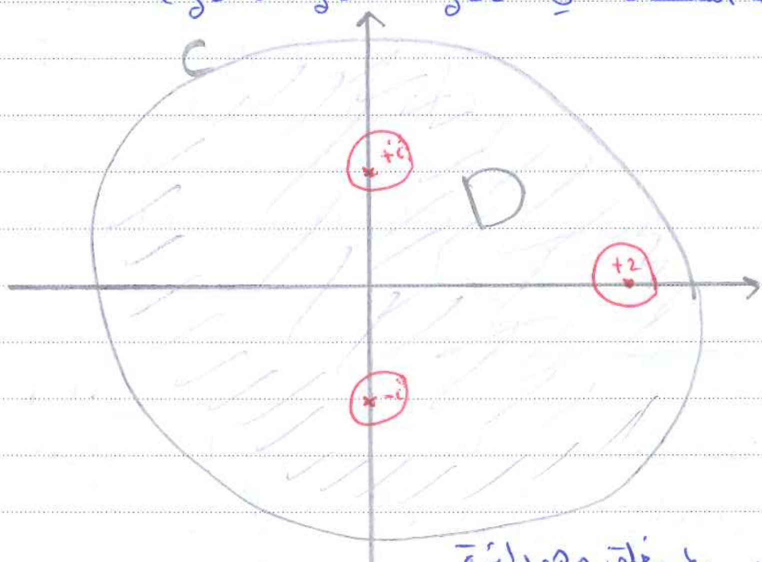
نختار دائرة : $C : |z| = R < \infty$ أي نصف قطرها كبير بما يكفي

نحدد النقاط الشاذة :

$$z - 2 = 0 \implies z = 2$$

$$z^2 + 1 = 0 \implies (z+i)(z-i) = 0 \implies z = \mp i$$

اذاً النقاط الشاذة هي ( $z = 2$ ، $z = i$ ، $z = -i$ )




نختار $C_1$ منحني بسيط مغلق وهو دائرة

مركزها $z = 2$ ونصف قطرها صغير بما يكفي.

ونختار $C_2$ منحني بسيط مغلق وهو دائرة مركزها $z = i$ ونصف قطرها صغير بما يكفي

" $C_3$ " " " " " " " $z = -i$ " " " "

وجميع هذه المنحنيات تقع داخل الدائرة C التي مركزها o ونصف قطرها R

بناءً على ذلك يكون التابع w تحليلياً في المنطقة D وهي منطقة متعددة الاتصال

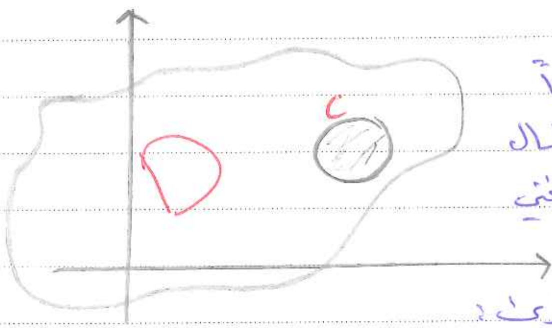
/ /

**2** ليكن التابع : $w = f(z) = z^2 + 2$

عيّن المنطقة التي يكون فيها $w$ تحليلياً.

**الحل :**

إن $w = f(z)$ لا يمتلك أي نقاط شاذة لذلك فهو تابع تحليلي في المنطقة $D$ وهي منطقة بسيطة الاتصال وتقع داخل الدائرة : $C : |z| = R < \infty$ التي نصف قطرها كبير بما يكفي.



**مبرهنة كوشي**

إذا كان $w = f(z)$ تابعاً تحليلياً معرّفاً على منطقة بسيطة الاتصال $D$ عندئذ فإن $\int_C f(z)dz$ حيث $C$ منحنٍ بسيط مغلق يقع بأكمله داخل $D$ هو تكامل معدوم أي بكلمات أخرى :

" تكامل أي تابع تحليلي على منحنٍ بسيط مغلق هو تكامل معدوم

$$\int_C f(z).dz = 0 \quad "$$

**أمثلة :**

بفرض $L$ منحنٍ بسيط مغلق ما ولتكن لدينا التوابع التالية :

$$f_3(z) = ch z , \quad f_2(z) = e^{z^2} , \quad f_1(z) = z^{10}$$

عندئذ وبما أن كلاً من التوابع السابقة هي توابع تحليلية على $D$ إذاً وحسب مبرهنة كوشي يكون :

$$\int_L z^{10}.dz = 0$$

$$\int_L e^{z^2}.dz = 0$$

$$\int_L ch z = 0$$

/ /

## نتائج مرهنة كوشي:

1- إذا كان: $w = f(z)$ تابعاً تحليلياً في منطقة بسيطة الاتصال D عندئذ فإن التكامل: $\int_a^b f(z).dz$ لا يتعلق بالطريق المسلوك الذي يصل بين النقطتين a ، b في المنطقة D .

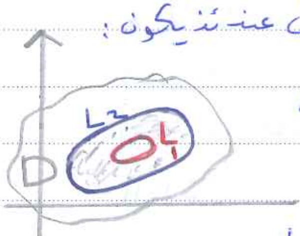
2- إذا كان: $w = f(z)$ تابعاً تحليلياً في منطقة بسيطة الاتصال D وكانت $a , z \in D$ عندئذ يكون:

$$F(z) = \int_a^z f(u).du$$

تابعاً تحليلياً في المنطقة D ويكون: $F'(z) = f(z)$

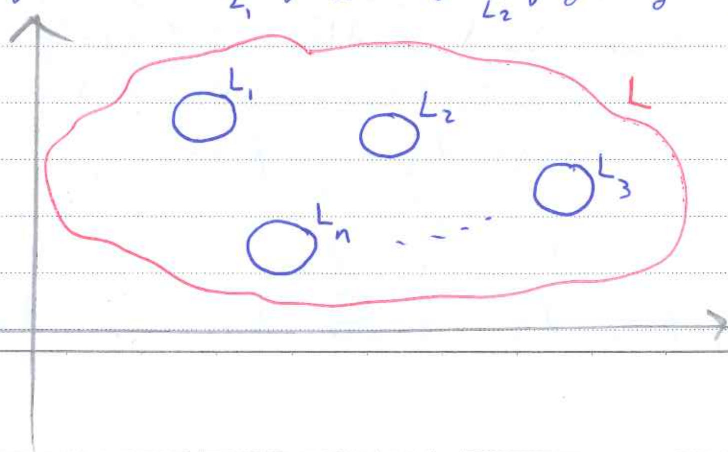
3- ليكن: $w = f(z)$ تابعاً تحليلياً في المنطقة الواقعة بين المنحنيين البسيطين المغلقين $L_1$ ، $L_2$ بحيث يقع أحدهما بأكمله ضمن الآخر. وبحيث يكون التابع $w = f(z)$ تحليلياً في كل نقطة من نقاط هذين المنحنيين عندئذ يكون:

$$\int_{L_1} f(z).dz = \int_{L_2} f(z).dz$$




4- ليكن: $w = f(z)$ تابعاً تحليلياً في المنطقة الواقعة بين المنحنيات: $L_1, L_2, \dots, L_n$ والمنحني L . وبشرط $L_i$ حيث $i = 1, \dots, n$ غير متقاطعة مع بعضها وجميعها منحنيات بسيطة مغلقة. كما أن $w = f(z)$ هو تابع تحليلي على المنحنيات $L_i$ ؛ $i = 1, \dots, n$ عندئذ يكون:

$$\int_L f(z).dz = \int_{L_1} f(z).dz + \int_{L_2} f(z).dz + \dots + \int_{L_n} f(z).dz$$



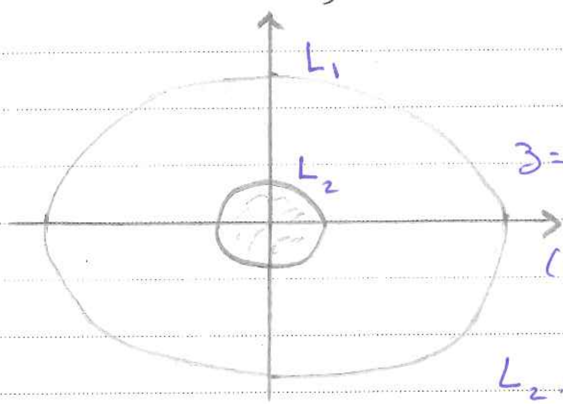
5- إذا كان $w=f(z)$ تابعاً تحليلياً في منطقة بسيطة الاتصال $D$ وكان $F(z)$ هو التابع الأصلي له، عندئذ ومن أجل أي منحني يصل بين نقطتين $a$، $b$ حيث: $a,b\in D$ يكون:

$$\int_a^b f(z)\,dz = F(z)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

## أمثلة وتمارين:

① أحسب التكامل: $\int_{L_1}\frac{dz}{z}$ حيث $L_1$ هو القطع الناقص الذي معادلته:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$





### الحل:

• نلاحظ أن $f(z)=\frac{1}{z}$ له نقطة شاذة وهي $z=0$ لذا نختار المنحني $L_2$ وهو الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $(1)$

$$L_2:\ |z|=1$$

عندئذ نلاحظ ما يلي:

ⓐ المنحني $L_2$ يقع بأكمله داخل القطع الناقص المفروض $L_1$.

ⓑ التابع: $f(z)=\frac{1}{z}$ هو تابع تحليلي في المنطقة الواقعة بين $L_1$، $L_2$

ⓒ التابع: $f(z)=\frac{1}{z}$ هو تابع تحليلي في كل نقطة من نقاط $L_1$ ونقاط $L_2$

إذاً وحسب النتيجة الثالثة من نتائج مبرهنة كوشي يكون:

$$\int_{L_1} f(z)\,dz = \int_{L_2} f(z)\,dz$$

$$z=e^{i\theta} \Longleftarrow L_2:\ |z|=1$$

$$dz = i\,e^{i\theta}\,d\theta \quad ; \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

$$\int_{L_2} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{i\,\cancel{e^{i\theta}}}{\cancel{e^{i\theta}}}\,d\theta = \int_0^{2\pi} i\,d\theta = [i\theta]_0^{2\pi}$$

/ /

ومنه يكون:

$$\int_{L_1} f(z).dz = \int_{L_2} \frac{dz}{z} = 2i\pi$$

**2** ليكن لدينا التابع:

$$w = f(z) = z^3 - iz^2 - 5z + 2i$$

وليكن لدينا المنحني: $L: |z|=1$ والمطلوب: حقق برهنة كوشي

الحل:

نلاحظ أن: $w = f(z) = z^3 - iz^2 - 5z + 2i$ هو تابع تحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي وبالتالي $w=f(z)$ تحليلي على المنطقة L التي تمثل الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 1. إذاً L هي منطقة بسيطة الاتصال.

ونريد التحقق من أن تكامل $f(z)$ على L معدوم:

$$L: |z|=1 \iff z = e^{it}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{حيث} \quad dz = i e^{it}.dt$$

$$\int_L f(z).dz = \int_0^{2\pi} (e^{3it} - ie^{2it} - 5e^{it} + 2i)(ie^{it}).dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (ie^{4it} + e^{3it} - 5ie^{2it} - 2e^{it}).dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}e^{4it} + \frac{1}{3i}e^{3it} - \frac{5}{2}e^{2it} - \frac{2}{i}e^{it}\right]_0^{2\pi}$$

$$\Rightarrow \int_L f(z).dz = \frac{1}{4}e^{8i\pi} + \frac{1}{3i}e^{6i\pi} - \frac{5}{2}e^{4i\pi} - \frac{2}{i}e^{2i\pi}$$
$$- \frac{1}{4}e^{0} - \frac{1}{3i}e^{0} + \frac{5}{2}e^{0} + \frac{2}{i}e^{0}$$

نلاحظ أن:

$$e^{8i\pi} = \cos 8\pi + i\sin 8\pi = 1$$

$$e^{6i\pi} = \cos 6\pi + i\sin 6\pi = 1 = e^{4i\pi} = e^{2i\pi}$$

إذاً: $\int_L f(z).dz = \frac{1}{4} + \frac{1}{3i} - \frac{5}{2} - \frac{2}{i} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3i} + \frac{5}{2} + \frac{2}{i}$

$$\Rightarrow \boxed{\int_L f(z).dz = 0}$$

إذاً تحققت برهنة كوشي.

/ /

3. أوجد ناتج التكامل:

$$\int_{i}^{1+i} z^2 \cdot dz$$

الحل:

نلاحظ أن $f(z) = z^2$ هو تابع تحليلي في منطقة بسيطة الاتصال

إذاً وحسب النتيجة الخامسة يكون:

$$\int_a^b f(z) \cdot dz = F(b) - F(a)$$

حيث: $F(z)$ هو التابع الأصلي:

$$F(z) = \frac{1}{3} z^3$$

إذاً:

$$\int_{i}^{1+i} z^2 \cdot dz = \frac{1}{3}(1+i)^3 - \frac{1}{3}(i)^3$$

$$= \frac{1}{3}[1 + 3i + 3i^2 + i^3] - \frac{1}{3} i^3$$

$$= \frac{1}{3} + i - 1 = i - \frac{2}{3}$$

4. إذا كان $C$ هو المنحني:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

يصل بين النقطتين: $z_1(1,1)$ ، $z_2(2,3)$ أحسب التكامل:

$$\int_C (12z^2 - 4iz) \cdot dz$$

الحل:

بما أن التابع تحليلي إذاً التكامل لا يتعلق بالطريق المسلوك، إذاً

$$\int_C (12z^2 - 4iz) \cdot dz = \int_{1+i}^{2+3i} (12z^2 - 4iz) \cdot dz$$

$$= \Big[4z^3 - 2iz^2\Big]_{1+i}^{2+3i} = 4(2+3i)^3 - 2i(2+3i)^2$$

$$- 4(1+i)^3 + 2i(1+i)^2$$

$$\Rightarrow \int_C = 4(8 + 36i + 54i^2 + 27i^3] - 2i[4 + 12i + 9i^2]$$

$$-4(1 + 3i + 3i^2 + i^3) + 2i(1 + 2i + i^2)$$

$$\int_C = 32 - 216 + 144i - 108i - 8i + 18i + 24 - 4 + 12 - 12i + 4i - 4$$

$$\Longrightarrow \int (12z^2-4iz)\cdot dz = 38i - 156$$

ملاحظة: يمكن تعويض $z = x+iy$ من معادلة المنحني وإيجاد $dz$ بدلالة $dx$ والمكاملة بالنسبة لـ $x$ ولكن هذه الطريقة طويلة وإن كانت صحيحة ولهذا كانت النتائج في هذه المحاضرة لاختصار الحل قدر الإمكان

**5** أحسب التكامل:

$$\int_{-1}^{2-i} z \cdot dz$$

**الحل:**

إن: $f(z)=z$ هو تابع تحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي

إذاً تكامله لا يتعلق بالطريق المسلوك.

$$\int_{-1}^{2-i} z \cdot dz = F(2-i) - F(-1)$$

حيث $F(z)$ هو التابع الأصلي لـ $f(z)$:

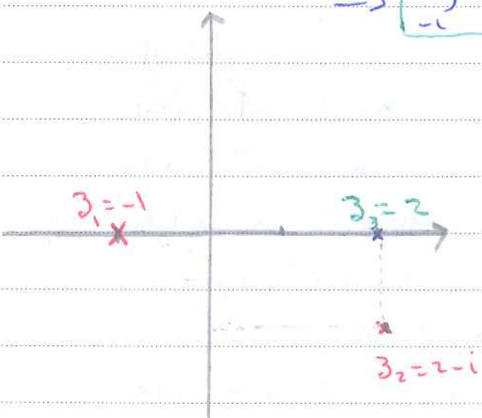
$$F(z) = \frac{1}{2} z^2$$

$$\int_{-1}^{2-i} z \cdot dz = \frac{1}{2}(2-i)^2 - \frac{1}{2}(-1)^2 = \frac{1}{2}(3-4i) - \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_{-1}^{2-i} z \cdot dz = 1-2i}$$

طريقة ثانية:

يمكن أن نجزئ الطريق $z_1 z_2$ إلى الطريقين: $\gamma_1 : z_1 z_3$ و $\gamma_2 : z_3 z_2$




فيصبح:

$$\int_{z_1}^{z_2} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

إن $\gamma_1$ هي الطريق الذي معادلته $y=0$

$z = x \Longrightarrow dz = dx$ وحدود التكامل من $x=-1 \leftarrow x=2$

إن $\gamma_2$ هي الطريق الذي معادلته: $x=2$:

$z = 2+iy \Longrightarrow dz = i \cdot dy$ وحدود التكامل من $y=0 \leftarrow y=-1$

بالتعويض نجد:

$$\int_{-1}^{2-i} z\cdot dz = \int_{-1}^{2} x\cdot dx + \int_{0}^{-1}(2+iy)\cdot i\,dy$$

$$= \int_{-1}^{2} x\cdot dx + \int_{0}^{-1}(2i-y)\cdot dy$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} + \left[2iy-\tfrac{1}{2}y^2\right]_{0}^{-1}$$

$$= \tfrac{1}{2}(4) - \tfrac{1}{2}(1) + 2i(-1) - \tfrac{1}{2}(1) - 0$$

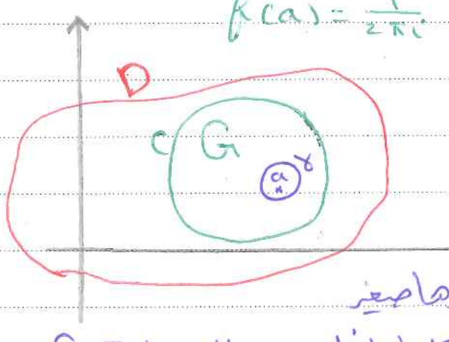
$$= 2 - \tfrac{1}{2} + 2i - \tfrac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_{-1}^{2-i} z\cdot dz = 1+2i}$$

## صيغة كوشي التكاملية «تكامل كوشي»

إذا كان التابع $w=f(z)$ تحليلياً في المنطقة بسيطة الاتصال D التي تحوي المنحني المنتظم المغلق C عندئذٍ فإن قيمة التابع في أي نقطة a تقع داخل المنحني C تعطى بالعلاقة:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)}\cdot dz$$




### الإثبات:

لتكن D ساحة وبسيطة الاتصال.
ولتكن G ساحة محتواة بتراص في D.
ولنأخذ a نقطة من الساحة G.
نرسم دائرة γ مركزها a ونصف قطرها صغير بقدر كاف «ρ» بحيث تقع الدائرة γ بأكملها داخل حدود الساحة G وهي المنحني المنتظم C. عندئذٍ نجد:
$f(z)$ تحليلي في ساحة محتواة بتراص ضمن مجموعة أخرى. بعبارة أخرى $f(z)$ تحليلي في جميع النقاط الواقعة داخل C وخارج γ وهو مستمر على كل منهما. أي أنه يمكن تطبيق نتائج مبرهنة كوشي في حال منطقة متعددة

/ /

~~الاتصال~~ الاتصال أي أن:

$$\int_c \frac{f(z)}{(z-a)}\cdot dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)}\cdot dz$$

ولكن $\gamma$ هي دائرة أي أن حدود تكاملها هي $[0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \int_c \frac{f(z)}{(z-a)}\cdot dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{(z-a)} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z)-f(a)+f(a)}{(z-a)} dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\cdot dz + \int_0^{2\pi} \frac{f(a)}{z-a}\cdot dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\cdot dz + f(a)\int_0^{2\pi} \frac{dz}{z-a}$$

وجدنا في التمرين (3) في بداية المحاضرة عند حساب: $\int \frac{dz}{(z-a)^{n+1}}$

أنه ومن أجل $n=0$ فإن: $\int_0^{2\pi} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$

ولنحسب الآن $\int_0^{2\pi} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\cdot dz$

نأخذ طويلة هذا التكامل:

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\cdot dz\right| \leq \int_0^{2\pi} \left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right|\cdot dz$$

ولكن لدينا:

$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ محدود حيث ~~[illegible]~~ المكاملة

$f(z)$ هي ضمن حدود المساحة $R$ بين $C$ و $\gamma$ إذاً $|f(z)-f(a)| < \varepsilon$

و $z-a$ أيضاً محدود حيث $|z-a| \leq r$

إذاً

$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right|\cdot dz < \frac{\varepsilon}{2\pi r}\cdot \ell$$

حيث $\ell$ طول الطريق $\gamma$ أي هو محيط الدائرة ويساوي $2\pi r$ وبالتالي،

$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right|\cdot dz < \frac{\varepsilon}{2\pi r}\cdot 2\pi r = \varepsilon$$

وبالتالي أصبح لدينا وبما أن التكامل هو الفرق بين قيمتي التابع الأصلي عند حدي التكامل نجد أن هذا الفرق أصغر من عدد حقيقي موجب أي أن القيمتين متساويتين وبالتالي قيمة التكامل معدومة.

« يوجد تمرين في التحليل الدالي »

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\cdot dz = 0$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z-a}\cdot dz = 0 + f(a)\cdot 2\pi i$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\cdot dz}$$

وهو المطلوب.

المحاضرة السابعة عشرة الأربعاء 12/12/2012

مسائل وتمارين:

[1] احسب: $\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\cdot dz$ حيث: $C: |z-2|=1$

الحل:

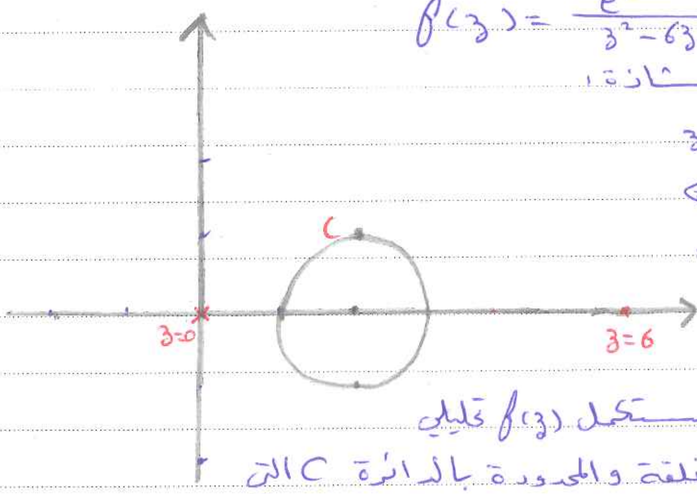
$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}$$

أ- نوجد النقاط الشاذة:

$$z^2 - 6z = 0$$

$$\Leftrightarrow z(z-6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = 6 \end{cases}$$

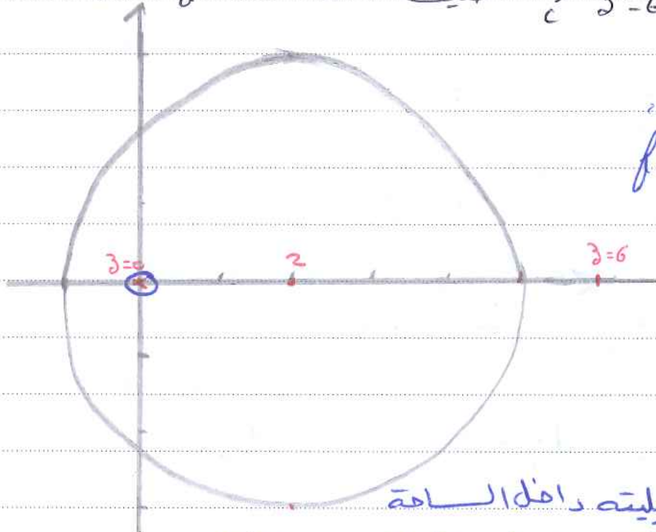



نلاحظ أن التابع المستكمل $f(z)$ تحليلي في الساحة المغلقة والمحدودة بالدائرة C التي مركزها $z(2,0)$ ونصف قطرها $r=1$ إذاً وحسب مبرهنة كوشي يكون:

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\cdot dz = 0$$

/ /

2 أحسب $\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\, dz$ حيث : $C: |z-2| = 3$




الحل:

نوجد النقاط الشاذة:

$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}$$

$$z^2 - 6z = 0$$

$$z(z-6) = 0$$

$$\begin{cases} z = 0 \\ z = 6 \end{cases}$$

التابع المستكمل يفقد تحليليته داخل الساحة المغلقة والمحدودة بالدائرة: $C: |z-2| = 3$ عند النقطة $z=0$

إذاً لدينا نقطة شاذة واحدة:

$$f(z) = \frac{e^{z^2}}{z(z-6)}$$

إن التابع: $g(z) = \frac{e^{z^2}}{z-6}$ هو تابع تحليلي داخل الساحة المغلقة و المحدودة $C$ نطبق صيغة كوشي التكاملية فيكون:

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C \frac{g(z)}{z}\, dz = 2\pi i\, g(0)$$

حيث $z=0$ هي النقطة الشاذة للتابع $f$

$$\Rightarrow \int_C f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{e^0}{0-6}\right) = 2\pi i \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$\boxed{\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z} = \frac{-\pi i}{3}}$$

3 أحسب $\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\, dz$ حيث : $C: |z-2| = 5$

الحل:

إن النقاط الشاذة للتابع هي: $z=0$ ، $z=6$

والتابع المستكمل يفقد تحليليته داخل الساحة المغلقة المحدودة بالدائرة $C$ عند النقطتين $z=0$ ، $z=6$.

لايمكن تطبيق صيغة كوشي التكاملية لوجود أكثر من نقطة شاذة واحدة

نفرق الكسر :

$$\frac{e^{z^2}}{z^2-6z} = \frac{e^{z^2}}{z(z-6)}$$

$$= e^{z^2}\left[\frac{A}{z} + \frac{B}{z-6}\right]$$

بالحساب نجد : $A = \frac{1}{6}$ ، $B = -\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{6}\cdot\frac{e^{z^2}}{z-6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{e^{z^2}}{z}$$

وبالتالي يكون :

$$\int_C f(z)\cdot dz = \frac{1}{6}\int_C \frac{e^{z^2}}{z-6}\cdot dz - \frac{1}{6}\int_C \frac{e^{z^2}}{z}\cdot dz$$

ان كلاً من التابعين المستكملين ينقد تحليلته عند نقطة واحدة أي يمكن تطبيق صيغة كوشي التكاملية على كل منها على حدة.

$$\int_C f(z)\cdot dz = \frac{1}{6}(2\pi i\, e^{36}) - \frac{1}{6}(2\pi i\, e^{0})$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\cdot dz = \frac{\pi i}{3}e^{36} - \frac{\pi i}{3}}$$

طريقة ثانية لحساب التكامل :

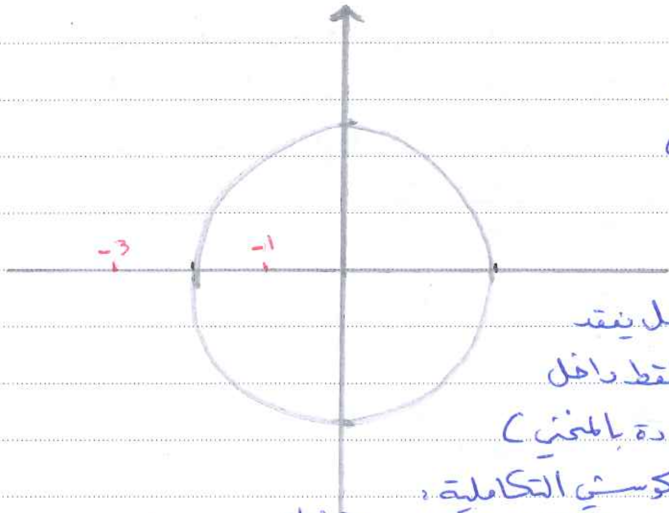
نحيط كلاً من النقطتين الشاذتين : $z=0$ ، $z=6$ بدائرتين الأولى لامركزها $z=0$ والثانية لامركزها $z=6$ بحيث نصفي قطري هاتين الدائرتين صغير بما يكفي وبحيث تقع كلاهما داخل $C$ دون أن تتقاطعا معها ودون أن تتقاطعا فيما بينهما عندئذ يمكن تطبيق كوشي من أجل ساحة متعددة الاتصال ، وبالتالي يكون :

$$\int_C = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

ونصل إلى نفس الناتج السابق.

$\boxed{4}$ أحسب التكامل: $\int_C \frac{ch\, i z}{z^2+4z+3} \cdot dz$ حيث: $C: |z| = 2$

الحل:



أ- نوجد النقاط الشاذة:

$$z^2+4z+3=0$$

$$(z+3)(z+1)=0$$

$$\begin{cases} z=-3 \\ z=-1 \end{cases}$$

نلاحظ أن التابع المستكمل يفقد تحليليته عند نقطة واحدة فقط داخل الساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني C

إذاً يمكن تطبيق صيغة كوشي التكاملية:

$$f(z) = \frac{ch\, i z}{z^2+4z+3} = \frac{ch\, i z}{(z+3)(z+1)}$$

ولدينا: $ch\, i z = \cos z$ إذاً:

$$f(z) = \frac{\cos z}{(z+3)(z+1)} = \frac{\frac{\cos z}{z+3}}{z+1} = \frac{g(z)}{z+1}$$

$$\int_C f(z) \cdot dz = 2\pi i \cdot g(-1) = \cancel{2}\pi i \left[\frac{\cos(-1)}{-1+3}\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_C \frac{ch\, i z}{z^2+4z+3} \cdot dz = \pi i \cos 1}$$

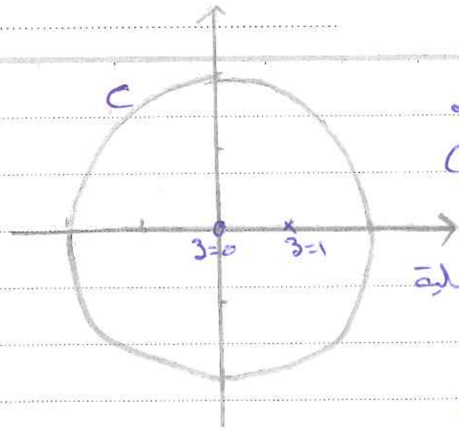
$\boxed{5}$ أحسب التكامل التالي:

$$\int_C \frac{\sin \pi z}{z(z-1)} \cdot dz$$

حيث: $C: |z| = 2$

الحل:

* النقاط الشاذة للتابع $f(z) = \frac{\sin \pi z}{z(z-1)}$ هي: $z=0$ ، $z=1$




فالتابع المستكمل ينفقد تحليليته
داخل الساحة المغلقة المحدودة بالمنحني C
عند نقطتين : $z=0$ ، $z=1$
لهذا لا يمكن تطبيق صيغة كوشي التكاملية
يمكننا كتابة $f(z)$ بشكل آخر.

$$f(z)=\frac{\sin \pi z}{z(z-1)}$$

$$f(z)=\sin \pi z\left[\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}\right]$$

$$f(z)=-\frac{\sin \pi z}{z}+\frac{\sin \pi z}{z-1}$$

$$\int_C f(z).dz=-\int_C \frac{\sin \pi z}{z}.dz+\int_C \frac{\sin \pi z}{z-1}.dz$$

نلاحظ أن كلاً من التابعين الجزئيين المستكملين له نقطة شاذة
واحدة لهذا يمكننا تطبيق صيغة كوشي التكاملية على كل منهما على حدة

$$\int_C f(z).dz=-2\pi i\left[\sin \pi z\right]_{z=0}+2\pi i\left[\sin \pi z\right]_{z=1}$$
$$=-2\pi i \sin 0+2\pi i \sin \pi=0$$

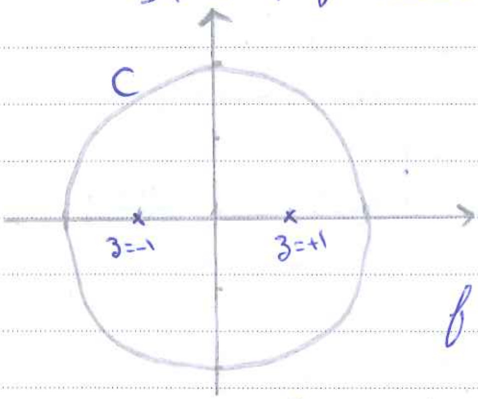
6 أحسب التكامل: $\int_C \frac{\cos z}{z^2-1}.dz$
حيث : $C: |z|=2$

الحل:

النقاط الشاذة للتابع $f(z)=\frac{\cos z}{z^2-1}$ هي: $z=+1$ ، $z=-1$
التابع المستكمل ينفقد تحليليته ضمن الساحة المغلقة والمحدودة
بالمنحني C عند نقطتين : $z=1$ ، $z=-1$.
نكتب $f(z)$ بشكل آخر أو نطبق نتائج برهنة كوشي على منطقة

High above the mountains far across the sea .. I can hear your voice

متقدمة الاتصال ،، الأسيل تنزيق الكحر وكتابة f بشكل جديد »




$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2-1} = \frac{\cos z}{(z+1)(z-1)}$$

$$f(z) = \cos z\left[\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1}\right]$$

بالحساب نجد أن $A=\frac{1}{2}$ ، $B=-\frac{1}{2}$

إذاً:

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos z}{z-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos z}{z+1}$$

وبحساب التكامل نجد :

$$\int_C f(z)\cdot dz = \frac{1}{2}\int_C \frac{\cos z}{z-1}\cdot dz - \frac{1}{2}\int_C \frac{\cos z}{z+1}\cdot dz$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi i\cos 1) - \frac{1}{2}(2\pi i\cos -1)$$

$$= \pi i\cos 1 - \pi i\cos 1 = 0$$

حيث : $\boxed{\cos 1 = \cos -1}$

7 أحسب التكامل:

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1}$$

حيث : $C: |z-1+2i| = \frac{1}{4}$

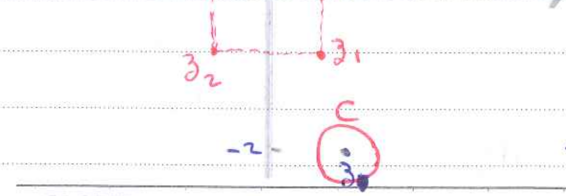
الحل:

إن $C$ هو منحني الدائرة التي مركزها $z_0(1,-2)$ ونصف قطرها $\frac{1}{4}$

ولنوجد النقاط الشاذة للتابع $f(z)$

$z^4+1=0 \Rightarrow z^4=-1$

ونبحث عن $z^{\frac{1}{4}}$




$$z_K = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2\pi K}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi K}{n}\right]$$

حيث : $n=4$ ، $K=0,1,2,3$

$r=1$ ، $\theta=\pi$

$$z_0 = (1)^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\boxed{z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$z_1 = (1)^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right]$$

$$z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$z_2 = (1)^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right]$$

$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$z_3 = (1)^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right]$$

$$z_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

نلاحظ أن الجذور الأربعة تقع خارج الدائرة $C$.

إذاً التابع المستكمل تحليلي داخل الساحة المغلقة والمحدودة بمنحني $C$

وبالتالي حسب مبرهنة كوشي يكون:

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1} = 0$$

---

**8** أحسب التكامل:

$$\int_C \frac{z^2+1}{(z-3)^5}\, dz$$

حيث: $C : |z| = 2$

**الحل:**

أوجد النقاط الشاذة:

$$(z-3)^5 = 0$$

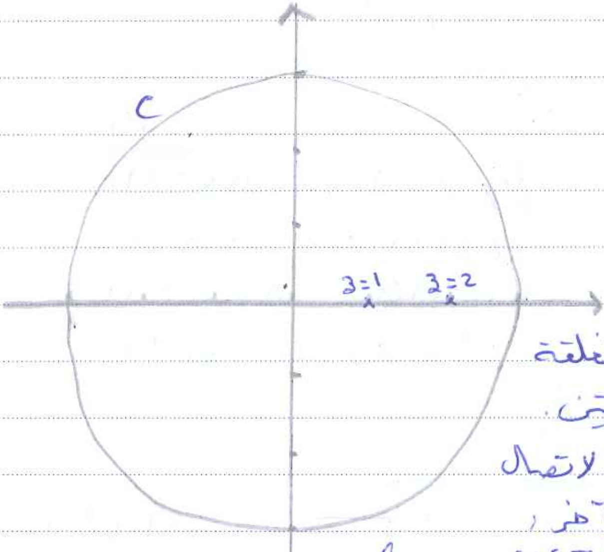
$$z = 3 \Leftarrow z - 3 = 0 \Leftarrow$$

ان التابع المستكمل تحليلي داخل الساحة المغلقة والمحدودة بمنحني الدائرة التي مركزها (0) ونصف قطرها (2) اذاً حسب مبرهنة كوشي:

$$\int_C \frac{z^2+1}{(z-3)^5}\, dz = 0$$

٩ أحسب التكامل: $\oint_C \frac{\cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} \cdot dz$

حيث: $C: |z|=3$




**الحل:**

النقاط الشاذة هي:

$$\begin{cases} z=1 \\ z=2 \end{cases}$$

إن التابع المستكمل يفقد تحليليته ضمن الساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني C عند نقطتين.

تكامل على ساحة متعددة الاتصال

أو نكتب $f(z)$ بشكل آخر:

$$f(z) = \frac{\cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} = \cos \pi z^2 \left[\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}\right]$$

بالحساب نجد أن: $A=-1$ ، $B=+1$

$$\Rightarrow f(z) = -\frac{\cos \pi z^2}{z-1} + \frac{\cos \pi z^2}{z-2}$$

وبهذا يكون:

$$\oint_C f(z) \cdot dz = \oint_C \frac{\cos \pi z^2}{z-2} \cdot dz - \oint_C \frac{\cos \pi z^2}{z-1}$$

وحسب صيغة كوشي التكاملية يكون:

$$\oint_C f(z) \cdot dz = 2\pi i \cos \pi (2)^2 - 2\pi i \cos \pi (1)^2$$

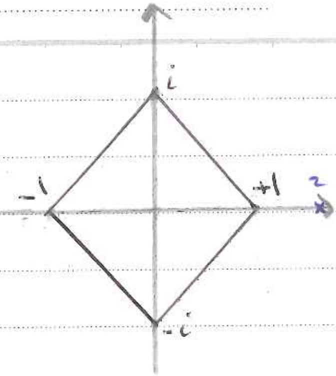
$$= 2\pi i \cos 4\pi - 2\pi i \cos \pi$$

$$= 2\pi i (1) - 2\pi i (-1)$$

$$= 2\pi i + 2\pi i$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_C f(z) \cdot dz = 4\pi i}$$

/ /




**10** أحسب التكامل :

$$\int_C \frac{e^z \cos z}{(z-2)^2} \cdot dz$$

حيث $C$ هو المنحني الموضح بالشكل :

**الحل :**

النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ :

$(z-2)^2 = 0 \Rightarrow z = 2$

إن التابع مستمر داخل المساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني $C$ إذاً أحسب من مبرهنة كوشي :

$$\boxed{\int_C \frac{e^z \cos z}{(z-2)^2} dz = 0}$$

**11** أحسب التكامل التالي :

$$\int_C \frac{z e^z}{z^2+4} \cdot dz$$

وذلك في الحالات التالية :

A) $C_1 : |z| = 1$

B) $C_2 : |z-2i| = 1$

C) $C_3 : |z+2i| = 1$

**الحل :**

النقاط الشاذة للتابع $f(z)$ :

$z^2 + 4 = 0$

$z^2 = -4$

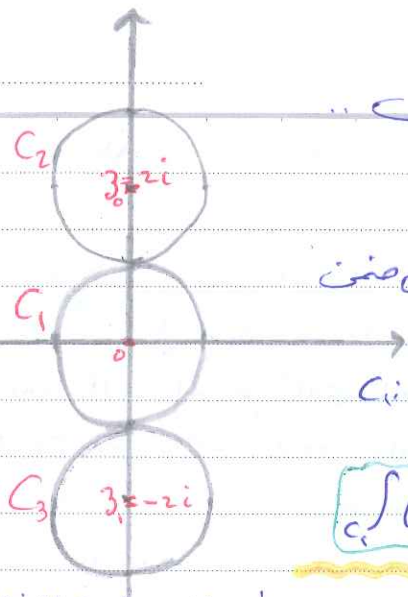
ونبحث عن $z^{\frac{1}{2}}$ ; $z_k = (r)^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2\pi K}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi K}{n}\right]$

حيث : $\theta = \pi$ ، $K = 0, 1$ ، $r = 4$ ، $n = 2$

$z_0 = (4)^{\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right] = 2[0+i]$

$\Longrightarrow z_0 = 2i$

$z_1 = (4)^{\frac{1}{2}} \left[\cos \frac{\pi + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{2}\right] = 2[0-i]$




غريبة الناس ..

$\Rightarrow z_1 = -2i$

ونلاحظ في الحالة:

A) التابع المستكمل تحليلي ضمن حدود الساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني: $C_1: |z|=1$ اذاً حسب مبرهنة كوشي:

$$\boxed{\int_{C_1} f(z)\cdot dz = 0}$$

B) التابع المستكمل يفقد تحليليته ضمن الساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني $C_2: |z-2i|=1$ عند النقطة: $z_0=2i$ إذاً حسب صيغة كوشي التكاملية يكون:

$$\int_{C_2} \frac{ze^z}{z^2+4}\cdot dz = 2\pi i\left[2i\,e^{2i}\right]$$
$$= -4\pi e^{2i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{C_2} \frac{ze^z}{z^2+4} = -4\pi\left[\cos 2 + i\sin 2\right]}$$

C) التابع المستكمل يفقد تحليليته ضمن الساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني $C_3: |z+2i|=1$ عند النقطة: $z_1=-2i$ إذاً حسب صيغة كوشي التكاملية يكون:

$$\int_{C_3} \frac{ze^z}{z^2+4}\cdot dz = 2\pi i\left[(-2i)\,e^{-2i}\right]$$
$$= 4\pi e^{-2i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{C_3} \frac{ze^z}{z^2+4}\cdot dz = 4\pi\left[\cos 2 - i\sin 2\right]}$$

# المحاضرة الثامنة عشرة «الأخيرة» الإثنين 17/12/2012

## مبرهنة المشتقات المتتالية لتابع تحليلي في نقطة:

إذا كان $w = f(z)$ تابعاً تحليلياً في منطقة بسيطة الاتصال D و التي تحوي المنحني المنتظم C مع داخله فإن مشتق التابع $f(z)$ من المرتبة n في كل نقطة داخل C يعطى بالعلاقة:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \cdot dz$$

ويمكننا أن نكتب:

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \cdot dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(a)$$

### مثال (1):

أوجد التكامل: $I = \int_C \frac{z^2+1}{(z-1)^2} \cdot dz$ حيث $C : |z| = 2$

**الحل:**

حسب مبرهنة المشتقات الجزئية يكون:

$$I = \int_C \frac{z^2+1}{(z-1)^2} \cdot dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(a)$$

حيث: $a = 1 \;,\; n = 1$

$$f'(a) = (z^2+1)' = 2(1) = 2$$

$$\Rightarrow I = \int_C \frac{z^2+1}{(z-1)^2} \cdot dz = \frac{2\pi i}{1}(2)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 4\pi i}$$

### مثال (2):

أحسب التكامل: $I = \int_C \frac{\cos z}{z^3} \cdot dz$ حيث $C : |z| = 2$

**الحل:**

حسب مبرهنة المشتقات الجزئية: $\int_C \frac{f(z) \cdot dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)$

/ /

$a=0 \ , \ n=2$

$$f''(0) = (\cos z)''\Big|_0 = -\cos 0 = -1$$

$$\Longrightarrow I = \int_C \frac{\cos z}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\cdot(-1) = -\pi i$$

**مثال (3):**

أحسب التكامل: $\int_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz$ حيث،

$C: |z|=1$

**الحل:**

حسب برهنة المشتقات الجزئية لدينا: $a=1 \ , \ n=2$

$$\int_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}(5z^2-3z+2)''\Big|_{z=1}$$

$$= \pi i\,(10) = 10\pi i$$

**طريقة ثانية:**

نلاحظ أن: $f(z) = 5z^2-3z+2$

$$= 5z^2 - 10z + 5 + 10z - 5 - 3z + 2$$

$$= 5(z^2-2z+1) + 7z - 7 + 7 - 3$$

$$= 5(z-1)^2 + 7(z-1) + 4$$

إذاً يمكننا أن نكتب:

$$\frac{f(z)}{(z-1)^3} = \frac{5(z-1)^2}{(z-1)^3} + \frac{7(z-1)}{(z-1)^3} + \frac{4}{(z-1)^3}$$

وبهذا يكون:

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^3}\,dz = 5\int_C \frac{dz}{z-1} + 7\int_C \frac{dz}{(z-1)^2} + 4\int_C \frac{dz}{(z-1)^3}$$

ووجدنا في محاضرة سابقة (( محاضرة 16 تشرين 3 )) أن:

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^{n+1}} = \begin{cases} 0 & ; \ n \neq 0 \\ 2\pi i & ; \ n=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz = 5(2\pi i) + 7(0) + 4(0) = 10\pi i$$

مثال (4)

أوجد التكامل: $\int_C \frac{ch z}{(z+1)^3(z-1)} \cdot dz$ حيث:

$C: |z| = 2$

الحل:

نلاحظ أنه لدينا نقطتان شاذتان ينعدم عندهما $\frac{ch z}{(z+1)^3(z-1)}$ كليته
داخل الساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني C. هما $z=-1$ ، $z=1$
نحيط كلاً من النقطتين بدائرة نصف قطرها صغير كفاية بحيث لا تتقاطع
الدائرتان مع بعضها ولا تتقاطعا مع المنحني C عندئذ يمكننا أن نكامل
على ساحة متعددة الاتصال فيكون:

$$\int_C = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

إذاً يمكننا أن نكتب:

$$\int_C \frac{ch z}{(z+1)^3(z-1)} \cdot dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{ch z}{(z+1)^3}}{z-1} \cdot dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{ch z}{z-1}}{(z+1)^3} \cdot dz$$

حيث:

$\gamma_1$ هي الدائرة التي مركزها $z=1$ ، $\gamma_2$ هي الدائرة التي مركزها $z=-1$

$$\int_C \frac{ch z}{(z+1)^3(z-1)} \cdot dz = 2\pi i + \frac{2\pi i}{2!} \left(\frac{ch z}{z-1}\right)''\Big|_{z=-1}$$

$$\left(\frac{ch z}{z-1}\right)'' = \left(\frac{sh z(z-1) - ch z}{(z-1)^2}\right)' = \left(\frac{z sh z - sh z - ch z}{(z-1)^2}\right)'$$

$$= \frac{(z-1)^2(\cancel{sh z} + z ch z - ch z - \cancel{sh z}) - (2z-2)(z sh z - sh z - ch z)}{(z-1)^4}$$

$$= \frac{(z-1)(z ch z - ch z) - 2z sh z + 2 sh z + 2 ch z}{(z-1)^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ch z}{z-1}\right)'' = \frac{z^2 ch z - 2z ch z + 3 ch z - 2z sh z + 2 sh z}{(z-1)^3}$$

وبهذا يكون:

$$\int_C \frac{ch z}{(z+1)^3(z-1)} \cdot dz = 2\pi i + \pi i \left[\frac{5}{e} + e\right]$$

/ /

**مثال (5)**

أحسب التكامل: $I = \int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^3} \cdot dz$

حيث: $C: |z| = 2$

**الحل:**

$$I = \int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^3} \cdot dz = \frac{2\pi i}{2!} \left(e^{2z}\right)'' \Big|_{z=-1}$$

$$\left(e^{2z}\right)'' = \left(2e^{2z}\right)' = 4e^{2z}$$

$$\Longrightarrow I = \int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^3} \cdot dz = \pi i \left(4e^{-2}\right) = \frac{4\pi e}{e^2}$$

**مثال (6):**

أحسب التكامل: $\int_C \frac{\cos\frac{\pi}{z+1}}{z^3} \cdot dz$ حيث: $C: |z| = \frac{1}{2}$

**الحل:**

$$I = \int_C \frac{\cos\frac{\pi}{z+1}}{z^3} \cdot dz = \frac{2\pi i}{2!} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{z+1}\right)'' \Big|_{z=0}$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{z+1}\right)'' = \left(\pm\frac{\pi}{z+1}\sin\frac{\pi}{z+1}\right)' = \left(-\frac{\pi}{z+1}\sin\frac{\pi}{z+1} \mp \left(\frac{\pi}{z+1}\right)^2\cos\frac{\pi}{z+1}\right)$$

$$I = \pi i\left(-\frac{\pi}{0+1}\sin\pi \mp \frac{\pi^2}{0+1}\cos\pi\right)$$

$$I = -\pi^3 i\cos\pi \Longrightarrow I = +\pi^3 i$$

**مثال (7):**

أوجد ناتج التكامل: $\int_C \frac{z\cos\pi z}{(z+2)^2(z-1)} \cdot dz$ حيث: $C: |z| = 4$

**الحل:**

النقاط الشاذة للتابع هي: $z = -2$ ، $z = 1$

نكتب $f(z)$ بشكل آخر:

$$f(z) = z\cos\pi z\left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{(z+2)^2}\right)$$

بالحساب نجد: $A = \frac{1}{9}$ ، $B = -\frac{1}{9}$ ، $C = -\frac{1}{3}$

$$f(z) = \frac{1}{9} \cdot \frac{z\cos\pi z}{z-1} - \frac{1}{9} \cdot \frac{z\cos\pi z}{z+2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{z\cos\pi z}{(z+2)^2}$$

$$\int_c f(z)\cdot dz = \frac{1}{9}\int_c \frac{z\cos\pi z\, dz}{z-1} - \frac{1}{9}\int_c \frac{z\cos\pi z\, dz}{z+2} - \frac{1}{3}\int_c \frac{z\cos\pi z\, dz}{(z+2)^2}$$

كلاً من التكاملين الأول والثاني نحسبه حسب صيغة كوشي التكاملية والتكامل الثالث حسب مبرهنة المشتقات المتتالية.

$$\int_c f(z)\cdot dz = \frac{1}{9}\left(2\pi i(1)\cos\pi\right) - \frac{1}{9}\left(2\pi i(-2)(\cos -2\pi)\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi i}{1!}(z\cos\pi z)'\right)\Big|_{z=-2}$$

$$\Rightarrow \int_c f(z)\cdot dz = \frac{2\pi i}{9}(-1) + \frac{4\pi i}{9}(1) - \frac{2\pi i}{3}\left(\cos\pi z - \pi z\sin\pi z\right)\Big|_{z=-2}$$

$$= -\frac{2\pi i}{9} + \frac{4\pi i}{9} - \frac{2\pi i}{3}\left(\cos(-2\pi) + 2\pi\sin(-2\pi)\right)$$

$$= \frac{2\pi i}{9} - \frac{2\pi i}{3}(1+0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_c f(z)\cdot dz = -\frac{4\pi i}{9}}$$

مثال (8):

أحسب التكامل: $\int_c \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}\cdot dz$ حيث:

$c: |z-1| = 1$

الحل:

$$f(z) = \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2} = \frac{\sin\pi z}{((z-1)(z+1))^2} = \frac{\sin\pi z}{(z-1)^2(z+1)^2}$$

يمكننا أن نكتب التابع على الشكل:

$$f(z) = \frac{\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2} = \frac{g(z)}{(z-1)^2}$$

وبهذا يكون:

$$\int_c f(z)\cdot dz = \frac{2\pi i}{1!}\, g'(z)\Big|_{z=1}$$

$$g'(z) = \frac{\pi\cos\pi z(z+1)^2 - 2(z+1)\sin\pi z}{(z+1)^4} = \frac{\pi\cos\pi z(z+1) - 2\sin\pi z}{(z+1)^3}$$

$$g'(1) = \frac{\pi \cos \pi\,(1+1) - 2\sin \pi}{(1+1)^3} = \frac{\pi(-1)(2) - 2(0)}{(2)^3} = \frac{-2\pi}{8}$$

أي أن:

$$\oint_c f(z)\,.dz = \frac{2\pi i}{1}\left(\frac{-2\pi}{8}\right) = -\frac{\pi^2}{2}$$

**مثال (9)**

أحسب التكامل:

$$I = \int_c \frac{\cos z}{z(z+i)^2}\,.dz$$

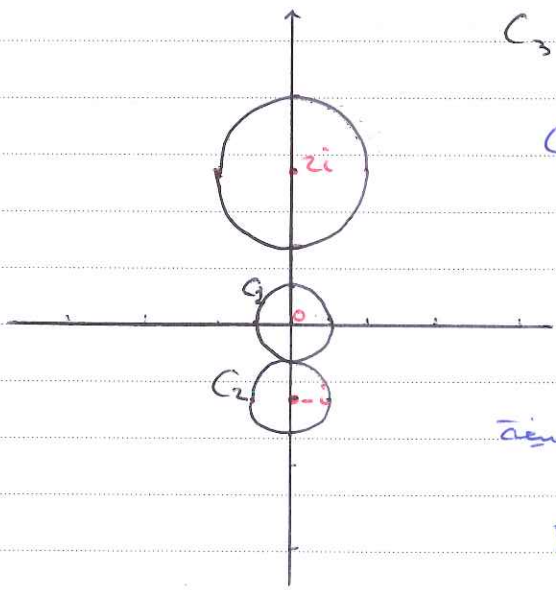
وذلك على المنحنيات التالية.

① $C_1 : |z| = \frac{1}{2}$

② $C_2 : |z+i| = \frac{1}{2}$

③ $C_3 : |z-2i| = 1$

**الحل:**




① التابع المستكمل على المنحني $C_1$ له نقطة شاذة واحدة هي $z=0$ لذا يمكن كتابة التكامل على الشكل:

$$I = \int_{C_1} \frac{\frac{\cos z}{(z+i)^2}}{z}\,.dz$$

أما الحساب فاستناداً إلى صيغة كوشي التكاملية ويكون

$$I = 2\pi i \left[\frac{\cos z}{(z+i)^2}\right]\Big|_{z=0}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\cos 0}{-1}\right)$$

$$\Longrightarrow I = -2\pi i$$

② التابع المستكمل على المنحني $C_2$ له نقطة شاذة واحدة هي $z=-i$

لذا نكتب التكامل على الشكل:

$$I = \int_{C_2} \frac{\cos z}{z(z+i)^2} \cdot dz = \int_{C_2} \frac{\frac{\cos z}{z}}{(z+i)^2} \cdot dz$$

ومنه استناداً إلى مبرهنة المشتقات التالية، ويكون،

$$I = \frac{2\pi i}{1!} \left[\frac{\cos z}{z}\right]' \Big|$$

$$= 2\pi i \left[\frac{-z\sin z - \cos z}{z^2}\right] \Big|_{z=-i}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{i\sin(-i) - \cos(-i)}{-1}\right]_{z=-i}$$

$$= 2\pi i \left[i\sin i - \cos i\right] = -2\pi i\left[\cos i - i\sin i\right]$$

$$= -2\pi i \, e^{-i^2} \Rightarrow I = -2\pi i e$$

(3) نلاحظ أن التابع المستكمل تحليلي داخل الساحة المغلقة والمحدودة بالمنحني $C_3$ لذا وحسب مبرهنة كوشي يكون:

$$I = \int_{C_3} \frac{\cos z}{z(z+i)^2} \cdot dz = 0$$

انتهى المقرر