

الفصل الخامس:

نصف الشبكة و الشبكة

1-5-1- أكبر حد أدنى و أصغر حد أعلى لمجموعة جزئية من مجموعة مرتبة:
1-1-5. تعريف: الحد الأدنى

لتكن (A, \leq) مجموعة مرتبة ما، و لتكن $A \supset B$ و غير خالية، سنقول إن العنصر $a \in A$ حد أدنى للمجموعة B في A إذا كان من أجل كل $x \in B$ فإن $a \leq x$.

2-1-5. تعريف: أكبر حد أدنى (\inf)

لتكن (A, \leq) مجموعة مرتبة ما، و لتكن $A \supset B$ و غير خالية، إذا وُجدَ عنصر $b \in A$ يحقق الشرطين التاليين:

- 1- b حد أدنى للمجموعة B في A .
- 2- b هو أكبر حد أدنى للمجموعة B في A ، أي أنه إذا كان a حد أدنى للمجموعة B في A فإن $a \leq b$.

فإن هذا العنصر b سيكون وحيد (هذا ينتج من الشرط 2 ومن كون العلاقة \leq تخالفية) و سنرمز لهذا العنصر $b = \inf_{(A, \leq)} B$ (و في حال عدم الالتباس سنرمز له اختصاراً $b = \inf B$)، وعندها سندعو B أكبر حد أدنى للمجموعة B في المجموعة المرتبة (A, \leq) .

3-1-5. تعريف: الحد الأعلى

لتكن (A, \leq) مجموعة مرتبة ما، و لتكن $A \supset B$ و غير خالية، سنقول إن العنصر $a \in A$ حد أعلى للمجموعة B في A إذا كان من أجل كل $x \in B$ فإن $x \leq a$.

4-1-5. تعريف: أصغر حد أعلى (\sup)

لتكن (A, \leq) مجموعة مرتبة ما، و لتكن $A \supset B$ و غير خالية، إذا وُجدَ عنصر $b \in A$ يحقق الشرطين التاليين:

- 1- b حد أعلى للمجموعة B في A .
- 2- b هو أصغر حد أعلى للمجموعة B في A ، أي أنه إذا كان a حد أعلى للمجموعة B في A فإن $b \leq a$.

فإن هذا العنصر b سيكون وحيد (هذا ينتج من الشرط 2 ومن كون العلاقة \leq تخالفية) و سنرمز لهذا العنصر $b = \sup_{(A, \leq)} B$ (و في حال عدم الالتباس سنرمز له اختصاراً $b = \sup B$)، وعندها سندعو B أصغر حد أعلى للمجموعة B في المجموعة المرتبة (A, \leq) .

5-1-5. مثال:

لتكن A مجموعة ما غير خالية، نعلم أن المجموعة $(P(A), \subset)$ مرتبة، ولتكن B_1, B_2 أي مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من A ، عندئذٍ فإن:

➤ أكبر حد أدنى للمجموعة $\{B_1, B_2\}$ هو "أكبر" مجموعة جزئية C من A تحقق
" $(C \subset B_2)$ و $(C \subset B_1)$ "

و بالتالي

$$.C = \inf_{(P(A), \subset)} \{B_1, B_2\} = B_1 \cap B_2$$

➤ أصغر حد أعلى للمجموعة $\{B_1, B_2\}$ هو "أصغر" مجموعة جزئية C' من A تحقق
" $(B_2 \subset C')$ و $(B_1 \subset C')$ "

و بالتالي

$$.C' = \sup_{(P(A), \subset)} \{B_1, B_2\} = B_1 \cup B_2$$

6-1-5. مثال:

لتكن المجموعة المرتبة كلياً (\mathbb{R}, \leq) ، و لتكن $B \subset \mathbb{R} \neq \emptyset$ ، عندئذٍ فإن $\inf_{(\mathbb{R}, \leq)} B$ هو ذاته $\inf B$ المعرّف في التحليل الرياضي المؤلف لمجموعة الأعداد الحقيقية \mathbb{R} .

و كذلك $\sup_{(\mathbb{R}, \leq)} B$ هو ذاته $\sup B$ المعرّف في التحليل الرياضي المؤلف لمجموعة الأعداد الحقيقية. فمثلاً:

$$\inf_{(\mathbb{R}, \leq)} \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} = 0 \quad , \quad \sup_{(\mathbb{R}, \leq)} \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} = 1$$

بالمقابل

$$\inf_{(\mathbb{R}^*, \leq)} \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

غير موجود.

كذلك لدينا

$$\inf_{(\mathbb{R}, \leq)}]\sqrt{2}, \sqrt{3}[= \sqrt{2} \quad , \quad \sup_{(\mathbb{R}, \leq)}]\sqrt{2}, \sqrt{3}[= \sqrt{3}$$

بالمقابل

$$\inf_{(\mathbb{Q}, \leq)} (]\sqrt{2}, \sqrt{3}[\cap \mathbb{Q}) \quad , \quad \sup_{(\mathbb{Q}, \leq)} (]\sqrt{2}, \sqrt{3}[\cap \mathbb{Q})$$

غير موجودين في المجموعة المرتبة (\mathbb{Q}, \leq) .

7-1-5. مثال:

لنرود \mathbb{N} مجموعة الأعداد الطبيعية بعلاقتي الترتيب " \leq " (أصغر أو يساوي المألوفة بين الأعداد) و " $|$ " (علاقة يقسم)، عندئذٍ نلاحظ أن

$$\inf_{(\mathbb{N}, \leq)} \{8, 12\} = 8 \quad , \quad \inf_{(\mathbb{N}, |)} \{8, 12\} = 4$$

$$\sup_{(\mathbb{N}, \leq)} \{8, 12\} = 12 \quad , \quad \sup_{(\mathbb{N}, |)} \{8, 12\} = 24$$

وبشكلٍ عام إذا كان m, n عددين طبيعيين بحيث $0 < m \leq n$ فإن

$$\inf_{(\mathbb{N}, \leq)} \{m, n\} = m \quad , \quad \inf_{(\mathbb{N}, |)} \{m, n\} = (m, n \text{ القاسم المشترك الأكبر للعددين } m, n)$$

$$\sup_{(\mathbb{N}, \leq)} \{m, n\} = n \quad , \quad \sup_{(\mathbb{N}, |)} \{m, n\} = (m, n \text{ المضاعف المشترك الأصغر للعددين } m, n)$$

8-1-5. مثال:

لتكن $(G, .)$ زمرة ما، و لتكن $sub(G)$ مجموعة كل الزمر الجزئية من G ، و لتكن $P(G)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من G ، نعلم أن كلاً من $(P(G), \subset)$ ، $(su(G), \subset)$ مجموعتين مرتبتين، كما أن $sub(G) \subset P(G)$. لتكن H, K أي زمريتين جزئيتين من G عندئذٍ فإن

$$\inf_{(sub(G), \subset)} \{H, K\} = H \cap K \quad , \quad \inf_{(P(G), \subset)} \{m, n\} = H \cap K$$

بالمقابل

$$\sup_{(sub(G), \subset)} \{H, K\} = \langle H \cup K \rangle \quad , \quad \sup_{(P(G), \subset)} \{H, K\} = H \cup K$$

حيث $\langle H \cup K \rangle$ هي الزمرة الجزئية من G المولدة بالمجموعة $H \cup K$ ، أي $\langle H \cup K \rangle$ هي أصغر زمرة جزئية من G تحوي المجموعة $H \cup K$ ، بعبارةٍ أخرى $\langle H \cup K \rangle$ هي تقاطع كل الزمر الجزئية من G التي تحوي $H \cup K$.

2-5- نصف الشبكة الدنيا:

1-2-5. من أجل أي مجموعتين غير خاليتين $A \supset B$ نرمز عادةً لتابع التباين القانوني للمجموعة B في المجموعة A بالرمز i_B ، أي أن

$$i_B : B \rightarrow A \quad ; \quad x \mapsto i_B(x) = x$$

2-2-5. من أجل أي مجموعة مرتبة (A, \leq) ، ومن أجل كل $x \in A$ فإن التابع i_x متزايد لكنه ليس ذي باقي بالضرورة.

3-2-5. في المجموعة المرتبة (A, \leq) ومن أجل كل $A \ni y, x$ فإن $\hat{i}_{x^\downarrow}(y^\downarrow) = x^\downarrow \cap y^\downarrow$ لأن

$$\hat{i}_{x^\downarrow}(y^\downarrow) = \{z \in x^\downarrow : z = \hat{i}_{x^\downarrow}(z) \in y^\downarrow\} = x^\downarrow \cap y^\downarrow$$

4-2-5. في المجموعة المرتبة (A, \leq) ومن أجل كل $A \ni y, x$ فإن x^\downarrow هي مجموعة كل الحدود الدنيا للعنصر x في المجموعة المرتبة (A, \leq) . كما أن $x^\downarrow \cap y^\downarrow$ هي مجموعة كل الحدود الدنيا للمجموعة $\{x, y\}$.

5-2-5. إن العنصر z في المجموعة المرتبة (A, \leq) والذي يحقق المساواة التالية (عند وجوده، حيث $A \ni x, y$)

$$x^\downarrow \cap y^\downarrow = z^\downarrow$$

هو أكبر حد أدنى للمجموعة $\{x, y\}$ ، أي $z = \inf_{(A, \leq)} \{x, y\}$ ، لأن:

$$1- z \leq x, y \in x^\downarrow, y^\downarrow \supset x^\downarrow \cap y^\downarrow = z^\downarrow \ni z$$

2- z أكبر حد أدنى للمجموعة $\{x, y\}$ ، أي يحقق

$$(t \leq x) \wedge (t \leq y) \Rightarrow (t \leq z)$$

لأن

$$(t \leq x) \wedge (t \leq y) \Rightarrow (t \in x^\downarrow) \wedge (t \in y^\downarrow)$$

$$\Rightarrow t \in x^\downarrow \cap y^\downarrow = z^\downarrow \Rightarrow t \leq z$$

6-2-5. بالاعتماد على المبرهنة 3-1-1 يكون التابع \hat{i}_{x^\downarrow} ذي باقي إذا فقط إذا كانت الصورة العكسية وفق هذا التابع لكل مجموعة دنيا أساسية هي مجموعة دنيا أساسية، أي إذا و فقط إذا كانت المجموعة $\hat{i}_{x^\downarrow}(y^\downarrow) = x^\downarrow \cap y^\downarrow$ دنيا أساسية و ذلك من أجل كل $A \ni y, x$ ، مما يعني أن تقاطع المجموعتين الدنيتين الأساسيتين $x^\downarrow, y^\downarrow$ هو مجموعة دنيا أساسية و ذلك من أجل كل $A \ni y, x$. بذلك نكون قد برهننا صحة المبرهنة التالية

7-2-5. مبرهنة:

لتكن (A, \leq) مجموعة مرتبة، عندئذٍ فإن القضيتين التاليتين متكافئتين:

(1) من أجل كل $A \ni x$ فإن التابع $\hat{i}_{x^\downarrow} : x^\downarrow \rightarrow A$ ذي باقي.

(2) من أجل كل $A \ni y, x$ فإنه يوجد $A \ni z$ يحقق $x^\downarrow \cap y^\downarrow = z^\downarrow$ ، أي أن تقاطع مجموعتين

دنيتين أساسيتين في (A, \leq) هو مجموعة دنيا أساسية (A, \leq) .

8-2-5. تعريف:

إذا حققت المجموعة المرتبة (A, \leq) أحد الشروط الواردة في المبرهنة 5-1-5 عندئذٍ سنرمز

$$z = x \wedge y$$

للعنصر z المحقق للمساواة التالية

$$x^\downarrow \cap y^\downarrow = z^\downarrow$$

أي أن

$$x \wedge y = \inf_{(A, \leq)} \{x, y\}$$

و سندعو (A, \leq) نصف شبكة دنيا، أو \wedge - نصف شبكة (meet semi-lattice).

3-5-3 نصف الشبكة العليا:

1-3-5. من أجل أي مجموعة مرتبة (A, \leq) ، ومن أجل كل $x \in A$ فإن التابع i_{x^\uparrow} متزايد لكنه ليس ذي باقي بالضرورة.

2-3-5. في المجموعة المرتبة (A, \leq) ومن أجل كل $x, y \in A$ فإن $i_{x^\uparrow}(y^\uparrow) = x^\uparrow \cap y^\uparrow$ لأن

$$\bar{i}_{x^\uparrow}(y^\uparrow) = \{z \in x^\uparrow : z = i_{x^\uparrow}(z) \in y^\uparrow\} = x^\uparrow \cap y^\uparrow$$

3-3-5. في المجموعة المرتبة (A, \leq) ومن أجل كل $x, y \in A$ فإن x^\uparrow هي مجموعة كل الحدود العليا للعنصر x في المجموعة المرتبة (A, \leq) . كما أن $x^\uparrow \cap y^\uparrow$ هي مجموعة كل الحدود العليا للمجموعة $\{x, y\}$.

4-3-5. إن العنصر z في المجموعة المرتبة (A, \leq) والذي يحقق المساواة التالية (عند وجوده، حيث $A \ni x, y$)

$$x^\uparrow \cap y^\uparrow = z^\uparrow$$

هو أصغر حد أعلى للمجموعة $\{x, y\}$ ، أي $z = \sup_{(A, \leq)} \{x, y\}$ ، لأن:

$$-3 \quad z \geq x, y \Leftrightarrow x^\uparrow, y^\uparrow \supset x^\uparrow \cap y^\uparrow = z^\uparrow \ni z$$

$$-4 \quad z \text{ أصغر حد أعلى للمجموعة } \{x, y\}, \text{ أي يحقق}$$

$$(x \leq t) \wedge (y \leq t) \Rightarrow (z \leq t)$$

لأن

$$(x \leq t) \wedge (y \leq t) \Rightarrow (t \in x^\uparrow) \wedge (t \in y^\uparrow)$$

$$\Rightarrow t \in x^\uparrow \cap y^\uparrow = z^\uparrow \Rightarrow z \leq t$$

5-3-5. بالاعتماد على المبرهنة 1-1-3 و الفقرة 2-3-5 يكون التابع i_{x^\uparrow} ذي باقي إذا فقط إذا كانت

الصورة العكسية وفق هذا التابع لكل مجموعة عليا أساسية هي مجموعة عليا أساسية، أي إذا و فقط إذا كانت المجموعة $i_{x^\uparrow}(y^\uparrow) = x^\uparrow \cap y^\uparrow$ عليا أساسية و ذلك من أجل كل $x, y \in A$ ، و بذلك نكون قد برهنا صحة المبرهنة التالية

6-3-5. مبرهنة:

لتكن (A, \leq) مجموعة مرتبة، عندئذٍ فإن القضايا التالية متكافئة:

(3) من أجل كل $x \in A$ فإن التابع $A \rightarrow x^\uparrow : x^\uparrow$ ذي باقي.

(4) من أجل كل $x, y, z \in A$ فإنه يوجد $z \in A$ يحقق $x^\uparrow \cap y^\uparrow = z^\uparrow$ ، أي أن تقاطع مجموعتين عليتين أساسيتين في (A, \leq) هو مجموعة عليا أساسية في (A, \leq) .

7-3-5. تعريف:

إذا حققت المجموعة المرتبة (A, \leq) أحد الشروط الواردة في المبرهنة السابقة عندئذٍ سنرمز

$$z = x \vee y$$

للعنصر z المحقق للمساواة التالية

$$x^\uparrow \cap y^\uparrow = z^\uparrow$$

مما يعني أن

$$x \vee y = \sup_{(A, \leq)} \{x, y\}$$

و سندعو (A, \leq) نصف، أو \vee - نصف شبكة (join semi-lattice).

8-3-5. نتائج:

1- إذا كانت (A, \leq) نصف شبكة دنيا فإن

$$\forall y, x \in A : x^\downarrow \cap y^\downarrow = (x \wedge y)^\downarrow, y^\downarrow \cap x^\downarrow = (y \wedge x)^\downarrow$$

و بالتالي فإن

$$\forall x, y \in A : x \wedge y = y \wedge x$$

و منه فالعملية الداخلية \wedge تبديلية.

2- بطريقة مشابهة نجد أنه إذا كانت (A, \leq) نصف شبكة عليا فإن

$$\forall y, x \in A : x^\uparrow \cap y^\uparrow = (x \wedge y)^\uparrow$$

و بالتالي فإن

$$\forall x, y \in A : x \vee y = y \vee x$$

و منه فالعملية الداخلية \vee تبديلية.

3- (A, \leq) نصف شبكة دنيا $\Leftrightarrow (A, \geq)$ نصف شبكة عليا.

4- إذا كانت (A, \leq) نصف شبكة دنيا، فإنه من أجل كل $x, y, z \in A$ فإن

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z := x \wedge y \wedge z := \inf_{(A, \leq)} \{x, y, z\}$$

لأن

$$(x^\downarrow \cap y^\downarrow) \cap z^\downarrow = x^\downarrow \cap (y^\downarrow \cap z^\downarrow)$$

5- إذا كانت (A, \leq) نصف شبكة عليا، فإنه من أجل كل $x, y, z \in A$ فإن

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z := x \vee y \vee z := \sup_{(A, \leq)} \{x, y, z\}$$

لأن

$$(x^\uparrow \cap y^\uparrow) \cap z^\uparrow = x^\uparrow \cap (y^\uparrow \cap z^\uparrow)$$

9-3-5. تعريف:

لتكن (A, \leq) مجموعة مرتبة، من أجل كل $x, y \in A$ لنرمز $x \wedge y = \inf_{(A, \leq)} \{x, y\}$ (في حال وجوده)، كما لنرمز $x \vee y = \sup_{(A, \leq)} \{x, y\}$ (في حال وجوده).

سنقول إن (A, \leq, \wedge, \vee) **شبكة** إذا حققت أحد الشروط المتكافئة التالية (برهان التكافؤ سهل و يترك تمرين للقارئ) :

- (1) (A, \leq) نصف شبكة عليا و دنيا بآن واحد.
- (2) (A, \leq) ، (A, \geq) كل منهما نصف شبكة دنيا.
- (3) (A, \leq) ، (A, \geq) كل منهما نصف شبكة عليا.
- (4) $\forall x, y \in A : (x \wedge y \in A) \wedge (x \vee y \in A)$
- (5) $\forall x_1, \dots, x_n \in A : (x_1 \wedge \dots \wedge x_n \in A) \wedge (x_1 \vee \dots \vee x_n \in A)$
- (6) كل من $\wedge : A \times A \rightarrow A$ ، $\vee : A \times A \rightarrow A$ قانوني تشكيل داخليين على A .
 $(x, y) \mapsto x \wedge y$ $(x, y) \mapsto x \vee y$

10-3-5. مثال:

بفرض (A, \leq) مجموعة مرتبة كلياً، عندئذٍ فإن (A, \leq, \wedge, \vee) شبكة حيث

$$\forall x, y \in A : x \wedge y = \inf_{(A, \leq)} \{x, y\} = \begin{cases} x & \text{if } x \leq y \\ y & \text{if } y \leq x \end{cases}$$

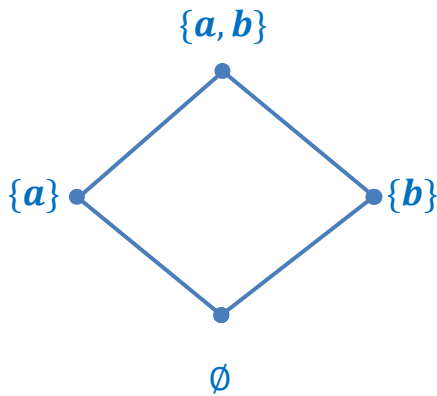
$$\forall x, y \in A : x \vee y = \sup_{(A, \leq)} \{x, y\} = \begin{cases} y & \text{if } x \leq y \\ x & \text{if } y \leq x \end{cases}$$

لأن

$$x^\downarrow \cap y^\downarrow = (\min\{x, y\})^\downarrow$$

و كذلك

$$x^\uparrow \cap y^\uparrow = (\max\{x, y\})^\uparrow$$



11-3-5. مثال:

لنأخذ المجموعة المرتبة $(P(\{a, b\}), \subseteq)$ ،

فنجد أن مخطط هاس لها كما في الشكل المجاور.

كما أن $\{a\} \wedge \{b\} = \emptyset$ ، $\{a\} \vee \{b\} = \{a, b\}$

كما أن

$$\forall B \subset \{a, b\} : B \wedge \emptyset = \emptyset , B \wedge \{a, b\} = B , B \vee \emptyset = B , B \vee \{a, b\} = \{a, b\}$$

وبالتالي فإن

$$\forall B_1, B_2 \subset \{a, b\} : B_1 \wedge B_2 , B_1 \vee B_2 \in P(\{a, b\})$$

مما يعني أن $(P(\{a, b\}), \subseteq, \cap, \cup)$ شبكة.

12-3-5. مثال:

نعلم أن المجموعة $(\mathbb{N}, |)$ مرتبة (حيث | هي علاقة يقسم)، كما أن $(\mathbb{N}, |, \wedge, \vee)$ شبكة، حيث من أجل أي عددين طبيعيين m, n بحيث $0 \leq m \leq n$ فإن

$$m \wedge n = \inf_{(\mathbb{N}, |)} \{m, n\} = (m, n \text{ القاسم المشترك الأكبر للعددين}) \in \mathbb{N}$$

$$m \vee n = \sup_{(\mathbb{N}, |)} \{m, n\} = (m, n \text{ المضاعف المشترك الأصغر للعددين}) \in \mathbb{N}$$

لتفسير المساواة الأخيرة يكفي ملاحظة أن

m^\uparrow هي مجموعة كل مضاعفات العدد الطبيعي m .

$m^\uparrow \cap n^\uparrow$ هي مجموعة كل المضاعفات المشتركة للعددين الطبيعيين m, n .

وبما أن

$$m^\uparrow \cap n^\uparrow = (m, n \text{ المضاعف المشترك الأصغر للعددين})^\uparrow$$

فإن

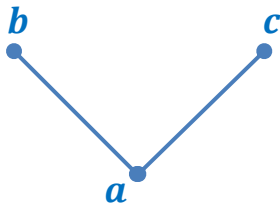
$$m \vee n = \sup_{(\mathbb{N}, |)} \{m, n\} = (m, n \text{ المضاعف المشترك الأصغر للعددين}) \in \mathbb{N}$$

بنقاشٍ مشابه يمكن اثبات أن

$$m \wedge n = \inf_{(\mathbb{N}, |)} \{m, n\} = (m, n \text{ القاسم المشترك الأكبر للعددين } m, n) \in \mathbb{N}$$

مما يبرهن على كون $(\mathbb{N}, |, \wedge, \vee)$ شبكة.

13-3-5. تمرين:



لتكن المجموعة المرتبة (A, \leq) ، المعطاة في مخطط هاس المجاور.

عندئذٍ فإن $b \wedge c = a \in A$ لكن $b \vee c \notin A$ ، وبالتالي فإن

(A, \leq, \wedge, \vee) ليست شبكة رغم أن (A, \leq) هي \wedge -نصف شبكة.

14-3-5. مثال:

لتكن A مجموعة ما غير خالية، عندئذٍ فإن $(P(A), \subset, \cap, \cup)$ شبكة.

من أجل التحقق من ذلك يكفي اثبات أنه من أجل أي مجموعتين جزئيتين من A و غير خاليتين مثل B_1, B_2 فإن

$$\inf_{(P(A), \subset)} \{B_1, B_2\} = B_1 \cap B_2 \quad , \quad \sup_{(P(A), \subset)} \{B_1, B_2\} = B_1 \cup B_2$$

وهذا يُفسَّر بملاحظة أن $\inf_{(P(A), \subset)} \{B_1, B_2\}$ هو أكبر حد أدنى للمجموعة $\{B_1, B_2\}$ وبالتالي فهو "أكبر" مجموعة جزئية C من A تحقق

$$"(C \subset B_1) \text{ و } (C \subset B_2)"$$

و بالتالي

$$.C = \inf_{(P(A), \subset)} \{B_1, B_2\} = B_1 \cap B_2$$

كذلك $\sup_{((A), \subset)} \{B_1, B_2\}$ هو أصغر حد أعلى للمجموعة $\{B_1, B_2\}$ وبالتالي فهو "أصغر" مجموعة جزئية C' من A تحقق

$$"(B_1 \subset C') \text{ و } (B_2 \subset C')"$$

و بالتالي

$$.C' = \sup_{(P(A), \subset)} \{B_1, B_2\} = B_1 \cup B_2$$

5-3-15. تمرين:

أثبت أن عدد مخططات هاس لكل الشبكات المؤلفة من 4 عناصر هو 2 ، ارسم هذين المخططين.

5-3-16. تمرين:

أثبت أن عدد مخططات هاس لكل الشبكات المؤلفة من 5 عناصر هو 5 ، ارسم هذه المخططات الخمس.

5-3-17. نتائج:

- 1- إذا كانت المجموعة المرتبة (A, \leq) تملك عنصرين أعظميين a, b فهي ليست شبكة لأن $a \vee b \notin A$ (علل ذلك!).
- 2- إذا كانت المجموعة المرتبة (A, \leq) تملك عنصرين أصغريين a, b فهي ليست شبكة (علل ذلك!).
- 3- كل شبكة منتهية (A, \leq, \wedge, \vee) ستملك عنصر أصغري (و أصغر) وحيد (علل) سنرمز له 0_A كما أنها ستملك عنصر أعظمي (و أعظم) وحيد (علل) سنرمز له 1_A ، و هذان العنصران سيحققان يحققان

$$\forall x \in A : x \wedge 0_A = 0_A , \quad x \vee 1_A = 1_A$$

5-3-18. تمرين:

ارسم الشكل العام لمخطط هاس لشبكة منتهية ما (A, \leq, \wedge, \vee) باستخدام العنصرين

$$0_A, 1_A$$

5-3-19. مبرهنة:

لتكن (A, \leq, \wedge, \vee) شبكة ما، عندئذٍ من أجل كل $x, y, z \in A$ فإن :

- (1) $x \wedge y = y \wedge x , \quad x \vee y = y \vee x$
- (2) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) , \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
- (3) $x \wedge x = x , \quad x \vee x = x$
- (4) $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$

الإثبات:

الفقرات (1) و (2) و (3) تم اثباتها في 5-3-8 ، و لنبرهن (4).

لنبرهن أن

$$\forall x, y \in A : x \wedge (y \vee x) = x$$

لدينا من أجل كل $x, y \in A$ فإن

$$(x \leq x) \wedge (x \leq y \vee x) \Rightarrow \boxed{x \leq x \wedge (x \vee y)}$$

من جهةٍ أخرى فإنه من أجل كل $x, y \in A$ فإن $x \wedge (x \vee y) = \inf\{x, \{x \vee y\}\}$ هو حد أدنى للعنصر x أي أن

$$x \wedge (x \vee y) \leq x$$

و بالتالي فإن $x = x \wedge (x \vee y)$.

بشكلٍ مشابهٍ يمكن اثبات أن $x \vee (x \wedge y) = x$. ■

في المبرهنة السابقة:

الخاصة (1) تدعى الصفة التبديلية لقانوني التشكيل الداخليين \wedge, \vee .

الخاصة (2) تدعى الصفة التجميعية لقانوني التشكيل الداخليين \wedge, \vee .

الخاصة (3) تبين أن قانوني التشكيل الداخليين \wedge, \vee جامدين (idempotents).

الخاصة (4) تدعى صفة الامتصاص (absorption) لقانوني التشكيل الداخليين \wedge, \vee .

20-3-5. ملاحظة:

وجدنا في المبرهنة السابقة أنه إذا كانت المجموعة المرتبة (A, \leq) شبكة فإنه يمكن تزويدها بقانوني تشكيل داخليين (\wedge و \vee) يحققان الشروط الأربعة في المبرهنة 13-1-5.

و السؤال البديهي الآن:

إذا كانت A مجموعة ما غير خالية و مزودة بقانوني تشكيل داخليين $\Delta, *$ ، فما هي الشروط التي يجب أن يحققها قانونا التشكيل الداخليان $\Delta, *$ حتى نستطيع تزويد A بعلاقة ترتيب \leq تجعل من $(A, \leq, *, \Delta)$ شبكة وبحيث

$$\forall x, y \in A : x * y = \inf_{(A, \leq)} \{x, y\} , \quad x \Delta y = \sup_{(A, \leq)} \{x, y\}$$

المبرهنة 21-3-5 و النتيجة 22-3-5 تبينان ذلك

21-3-5. مبرهنة:

1- إذا كانت (A, \wedge) نصف زمرة تبديلية جامدة فإنه يمكن تزويد المجموعة A بالعلاقة \leq المعرفة كما يلي:

$$\forall x, y \in A : x \leq y \iff x \wedge y = x$$

وعندئذٍ فإن (A, \leq) مجموعة مرتبة كما أنها \wedge -نصف شبكة.

2- إذا كانت (A, \vee) نصف زمرة تبديلية جامدة فإنه يمكن تزويد المجموعة A بالعلاقة \leq المعرفة كما يلي:

$$\forall x, y \in A : x \leq y \iff x \vee y = y$$

وعندئذٍ فإن (A, \leq) مجموعة مرتبة كما أنها \vee -نصف شبكة.

الإثبات:

لنبرهن القسم 1 من المبرهنة و يتم اثبات القسم 2 بشكل مشابه.

لتكن (A, \wedge) نصف زمرة تبديلية جامدة و لنزود المجموعة A بالعلاقة \leq المعرفة كما يلي:

$$\forall x, y \in A : x \leq y \stackrel{\text{بالتعريف}}{\iff} x \wedge y = x$$

لنتحقق من كون (A, \leq) مجموعة مرتبة:

1. شرط الانعكاسية:

$$x \in A \stackrel{\text{نصف زمرة جامدة } (A, \wedge)}{\implies} x \wedge x = x \implies x \leq x$$

2. شرط التخالفية:

$$(x \leq y) \wedge (y \leq x) \implies (x \wedge y = x) \wedge (y \wedge x = y) \stackrel{\text{نصف زمرة تبديلية } (A, \wedge)}{\implies} x = y$$

3. شرط المتعددية:

$$\begin{aligned} (x \leq y) \wedge (y \leq z) &\implies (x \wedge y = x) \wedge (y \wedge z = y) \implies \\ x \wedge z &= (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x \implies x \leq z \end{aligned}$$

لنتحقق من كون المجموعة المرتبة (A, \leq) هي \wedge - نصف شبكة:

لنبرهن أن

$$\forall x, y \in A : \inf_{(A, \leq)} \{x, y\} = x \wedge y$$

وهذا يكافئ أن

$$\boxed{\forall x, y \in A : x^\downarrow \cap y^\downarrow = (x \wedge y)^\downarrow}$$

□

$$z \in x^\downarrow \cap y^\downarrow \implies (z \leq x) \wedge (z \leq y)$$

$$\implies (z \wedge x = z) \wedge (z \wedge y = z)$$

$$\implies z \wedge (x \wedge y) = (z \wedge z) \wedge (x \wedge y) = (z \wedge x) \wedge (z \wedge y) = z \wedge z = z$$

$$\implies z \leq x \wedge y \implies z \in (x \wedge y)^\downarrow$$

$$\text{ومنه } x^\downarrow \cap y^\downarrow \subset (x \wedge y)^\downarrow$$

□

$$z \in (x \wedge y)^\downarrow \implies z \leq x \wedge y \implies z \wedge (x \wedge y) = z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z \wedge x = (z \wedge x \wedge y) \wedge x = z \wedge x \wedge y = z \Rightarrow z \leq x \Rightarrow z \in x^\downarrow \\ z \wedge y = (z \wedge x \wedge y) \wedge y = z \wedge x \wedge y = z \Rightarrow z \leq y \Rightarrow z \in y^\downarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow z \in x^\downarrow \cap y^\downarrow$$

■ ومنه $(x \wedge y)^\downarrow \supset x^\downarrow \cap y^\downarrow$. من الاحتواءين نستنتج أن $(x \wedge y)^\downarrow = x^\downarrow \cap y^\downarrow$ وتم المطلوب. ■

22-3-5. نتيجة:

القضيتان التاليتان متكافئتان:

- 1- (A, \leq) نصف شبكة دنيا أو \wedge -نصف شبكة.
- 2- (A, \wedge) نصف زمرة تبديلية جامدة، أي بنية تبديلية و تجميعية و تحقق $\forall x \in A : x \wedge x = x$

الإثبات:

$$\boxed{1 \Rightarrow 2}$$

تم سابقاً في المبرهنة 19-3-5.

$$\boxed{2 \Rightarrow 1}$$

■ تم سابقاً في المبرهنة 21-3-5.

23-3-5. نتيجة:

القضيتان التاليتان متكافئتان:

- 1- (A, \leq) نصف شبكة عليا أو \vee -نصف شبكة.
- 2- (A, \vee) نصف زمرة تبديلية جامدة، أي بنية تبديلية و تجميعية و تحقق $\forall x \in A : x \vee x = x$

الإثبات:

$$\boxed{1 \Rightarrow 2}$$

تم سابقاً في المبرهنة 19-3-5.

$$\boxed{2 \Rightarrow 1}$$

■ تم سابقاً في المبرهنة 21-3-5.

5-3-24. مبرهنة:

القضيتان التاليتان متكافئتان:

1- (A, \leq, \wedge, \vee) شبكة.

2- (A, \wedge) و (A, \vee) نصفي زمرتين تبديليتين و تحققان شرط الامتصاص، أي تحققان

$$\forall x, y \in A : x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$$

الإثبات:

$1 \Rightarrow 2$ تم إثباته سابقاً في 5-3-19.

لنبرهن أن $2 \Leftarrow 1$:

إن نصف الزمرة التبديلية (A, \wedge) والتي تحقق شرط الامتصاص ستعرف على A علاقة الترتيب التالية:

$$\forall x, y \in A : x \leq_1 y \stackrel{\text{بالتعريف}}{\iff} x \wedge y = x$$

كما أن نصف الزمرة التبديلية (A, \vee) والتي تحقق شرط الامتصاص ستعرف على A علاقة الترتيب التالية:

$$\forall x, y \in A : x \leq_2 y \stackrel{\text{بالتعريف}}{\iff} x \vee y = y$$

و الآن لإنهاء برهان المبرهنة يكفي إثبات أن العلاقتين \leq_1, \leq_2 متساويتين ومن ثم بالاستفادة من النتيجةين 5-3-20 و 5-3-21 نجد أن (A, \leq) شبكة عليا و دنيا بأن واحد مما يعني أن (A, \leq, \wedge, \vee) شبكة و يتم المطلوب.

لنبرهن أن

$$\forall x, y \in A : x \leq_1 y \iff x \leq_2 y$$

أي لنبرهن أن

$$\forall x, y \in A : x \wedge y = x \iff x \vee y = y$$

لدينا

$$x \wedge y = x \Rightarrow x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$$

كما أن

$$x \vee y = y \Rightarrow x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x. \blacksquare$$

4-5- تمارين:**1-4-5. تمرين:**

لتكن (A, \leq, \wedge, \vee) شبكة ما، أثبت أنه من أجل كل $x, y, z \in A$ فإن

$$[(x \wedge y) \vee (x \wedge z)] \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z)] = x \wedge y$$

توجيه:

لدينا وضوحاً

$$x \wedge y \leq [(x \wedge y) \vee (x \wedge z)] \wedge [(x \wedge y) \vee (y \wedge z)]$$

2-4-5. تمرين:

لتكن (A, \leq, \wedge, \vee) شبكة ما، وليكن $m, n \in \mathbb{N}^*$ ، ولتكن

$$\{x_{i,j} \in A : (i,j) \in [m] \times [n] := \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}\} \subset A$$

أثبت أن:

$$\forall (i,j) \in [m] \times [n] : \bigwedge_{i=1}^m x_{i,j} \leq \bigvee_{j=1}^n x_{i,j}$$

ثم استنتج أن

$$\bigvee_{j=1}^n \bigwedge_{i=1}^m x_{i,j} \leq \bigwedge_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^n x_{i,j}$$

3-4-5. تمرين:

لتكن A مجموعة كل المجموعات المنتهية والجزئية من \mathbb{N} ، أثبت أن (A, \subset, \cap, \cup) شبكة لا تملك عنصر أعظمي (أو أعظم) 1_A لكن تملك عنصر أصغر هو $0_A = \emptyset$.

4-4-5. تمرين:

ارسم مخطط هاس لشبكة غير منتهية لكن قابلة للعد ولا تملك عنصر أعظمي ولا عنصر أصغري.

5-4-5. تمرين:

لتكن $(A, \leq_1, \wedge_1, \vee_1)$ ، $(B, \leq_2, \wedge_2, \vee_2)$ شبكتين ما، و لتكن $F_{\leq}(A, B)$ مجموعة كل التوابع المترابطة من A إلى B ، أثبت أن $(F_{\leq}(A, B), \leq)$ شبكة، حيث

$$\forall f, g \in F_{\leq}(A, B) : f \leq g \Leftrightarrow (f(x) \leq_2 g(x), \forall x \in B)$$

ثم بين في حال A, B منتهيتين، كيف سيُعرّف التابعان $0_{F_{\leq}(A, B)}$ ، $1_{F_{\leq}(A, B)}$.

توجيه:

أثبت أن $f \wedge g, f \vee g$ معرفان كما يلي

$$\forall x \in A : (f \wedge g)(x) := f(x) \wedge_2 g(x) , (f \vee g)(x) := f(x) \vee_2 g(x)$$

6-4-5. تمرين:

لتكن (A, \leq, \wedge, \vee) شبكة ما، و ليكن $a, b \in A$ و لنرمز

$$[a, b] := \{x \in A : a \leq x \leq b\}$$

أثبت أن التابع التالي ذي باقي و أوجد باقيه

$$f : [a \wedge b, b] \rightarrow [a, a \vee b] ; x \mapsto f(x) := x \vee a$$

7-4-5. تمرين:

ليكن V فضاء شعاعي على حقل ما، و لتكن $sub(V)$ مجموعة كل الفضاءات الشعاعية الجزئية من V ، أثبت أن $(sub(V), \subset, \cap, \cup)$ شبكة، حيث من أجل كل $V_1, V_2 \in sub(V)$ فإن $V_1 \vee V_2$ هو أصغر فضاء شعاعي جزئي من V يحوي كل من الفضائين V_1, V_2 ، أي أن

$$V_1 \vee V_2 := \langle V_1 \cup V_2 \rangle = V_1 + V_2$$

8-4-5. تمرين:

لتكن $(G, .)$ زمرة ما، و لتكن $sub(G)$ مجموعة كل الزمر الجزئية من G ، أثبت أن $(sub(G), \subset, \cap, \cup)$ شبكة، حيث من أجل كل $H_1, H_2 \in sub(G)$ فإن $H_1 \vee H_2$ هو أصغر زمرة جزئية من G تحوي كل من الزمرتين H_1, H_2 ، أي أن

$$H_1 \vee H_2 := \langle H_1 \cup H_2 \rangle$$

9-4-5. تمرين:

لتكن $(G, .)$ زمرة ما و لتكن $N(G)$ مجموعة كل الزمر الجزئية الناعمية في G ، أثبت أن $(N(G), \subset, \wedge, \vee)$ شبكة حيث

$$\forall H, K \in N(G):$$

$$H \wedge K = H \cap K$$

$$H \vee K = H.K = \{x.y : x \in H \wedge y \in K\}$$

10-4-5. تمرين:

أثبت أن مجموعة كل التوابع ذات الباقي بين شبكتين ستشكل نصف شبكة عليا (انظر التمرين 5-4-5).

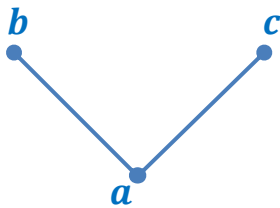
5-5- شبكة المجموعات الدنيا في مجموعة مرتبة:

لتكن (A, \leq) مجموعة مرتبة، ولنرمز $Down(A)$ لمجموعة كل المجموعات الدنيا في A ، نعلم أن $Down(A)$ مغلقة بالنسبة للاجتماع و التقاطع (حسب مبرهنة)، و بالتالي فإن $(Down(A), \subset, \cap, \cup)$ شبكة، تدعى شبكة المجموعات الدنيا في المجموعة المرتبة A .

5-5-1. ملاحظة:

$$0_{Down(A)} = \emptyset, 1_{Down(A)} = A \text{ و بالتالي } \emptyset, A \in Down(A)$$

5-5-2. تمرين:



لتكن المجموعة المرتبة (A, \leq) ، المعطاة في مخطط هاس المجاور.

أوجد $Down(A)$ ، ثم ارسم مخطط هاس لها.

5-5-3. مبرهنة:

لتكن A مجموعة مرتبة منتهية ومكونة من n عنصر، عندئذٍ فإن عدد المجموعات الدنيا فيها لن يقل عن $n + 1$ ولن يزيد عن 2^n . أي أن

$$|A| = n \Rightarrow n + 1 \leq |Down(A)| \leq 2^n$$

الإثبات:

إن عدد المجموعات الدنيا في المجموعة المرتبة (A, \leq) يتعلق بعلاقة الترتيب \leq ، من الواضح أن علاقة الترتيب التي تعطي أقل عدد ممكن من المجموعات الدنيا هي علاقة الترتيب الكلي أي عندما

$$A = \{x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$$

وعندها فإن

$$Down(A) = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_1, \dots, x_n\}\} \Rightarrow |Down(A)| = n + 1$$

كما أن أن علاقة الترتيب التي تعطي أكبر عدد ممكن من المجموعات الدنيا هي علاقة الترتيب التالية

$$\forall x, y \in A : (x \leq y \Leftrightarrow x = y)$$

وعندها فإن

$$Down(A) = P(A) \Rightarrow |Down(A)| = 2^n$$

و بالتالي من أجل أي علاقة ترتيب \leq على A فإن

$$n + 1 \leq |Down(A)| \leq 2^n . \blacksquare$$

5-6-6- الشبكة الجزئية من شبكة:

لتكن (A, \leq) مجموعة مرتبة و لتكن $\emptyset \neq B \subset A$ نعلم أن (B, \leq) مجموعة مرتبة أيضاً. إذا كانت (A, \leq, \wedge, \vee) شبكة فإننا سندعو (B, \leq, \wedge, \vee) شبكة جزئية من A إذا حققت الشرط التالي

$$\forall x, y \in B : x \wedge y, x \vee y \in B$$

حيث

$$\forall x, y \in B : \inf_{(A, \leq)} \{x, y\} = x \wedge y \quad , \quad \sup_{(A, \leq)} \{x, y\} = x \vee y$$

5-6-1- تمرين:

بفرض H زمرة جزئية من الزمرة (G, \cdot) ، أثبت أن $(sub(H), \subset, \cap, \cup)$ هي شبكة جزئية من الشبكة $(sub(G), \subset, \cap, \cup)$ ، راجع التمرين 5-4-8.

5-6-2- تمرين:

بفرض $m \in \mathbb{N}^*$ ، أثبت أن $(m\mathbb{N}, |, \wedge, \vee)$ هي شبكة جزئية من $(\mathbb{N}, |, \wedge, \vee)$. حيث $|$ هي علاقة يقسم، و من أجل كل $k, l \in \mathbb{N}$ فإن $k \wedge l$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين k, l ، بالمقابل $k \vee l$ هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين k, l .

5-6-3- تعريف: المثالي (ideal) في شبكة

لتكن (A, \leq, \wedge, \vee) شبكة ما، و لتكن I أي مجموعة جزئية غير خالية من A ، سندعو I مثالي في A إذا و فقط إذا حققت الشرطين التاليين:

- 1- $I = \emptyset$ أو (I, \leq, \wedge, \vee) شبكة جزئية من الشبكة (A, \leq, \wedge, \vee) .
- 2- I مجموعة دنيا في A .

5-6-4- تعريف: المرشحة (filter) في شبكة

لتكن (A, \leq, \wedge, \vee) شبكة ما، و لتكن I أي مجموعة جزئية غير خالية من A ، سندعو I مرشحة في A إذا و فقط إذا تحقق الشرطين التاليين:

- 3- $I = \emptyset$ أو (I, \leq, \wedge, \vee) شبكة جزئية من الشبكة (A, \leq, \wedge, \vee) .
- 4- I مجموعة عليا في A .

5-6-5- تمرين:

أثبت أن تقاطع شبكتين جزئيتين من شبكة هو إما مجموعة خالية أو شبكة جزئية.

6-6-5. تمرين:

لتكن (A, \leq, \wedge, \vee) شبكة ما، و لتكن $I(A)$ مجموعة كل المثاليات في A ، أي أن

$$I(A) = \{B \subset A \quad / \quad (B \text{ مجموعة دنيا في } A) \wedge (B \text{ شبكة جزئية من } A)\}$$

و المطلوب:

1- أثبت أن $(I(A), \subset, \cap, \cup)$ شبكة حيث

$$\forall B_1, B_2 \in I(A) :$$

$$B_1 \vee B_2 := \{x \in A / \exists (b_1, b_2) \in B_1 \times B_2 : x \leq b_1 \vee b_2\}$$

2- استنتج أنه رغم كون كل من $(Down(A), \subset, \cap, \cup)$ ، $(I(A), \subset, \cap, \cup)$ شبكتين و

$I(A) \subset Down(A)$ ، إلا أن $(I(A), \subset, \cap, \cup)$ ليست شبكة جزئية من الشبكة

$$.(Down(A), \subset, \cap, \cup)$$

7-6-5. تمرين:

أثبت أن مجموعة كل المرشحات لشبكة ما، مزودةً بعملية الاحتواء ستشكل شبكة.

8-6-5. تمرين:

ليكن V فضاء شعاعي على حقل ما ، و لتكن $sub(V)$ مجموعة كل الفضاءات الشعاعية الجزئية منه. و لتكن $P(V)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من المجموعة V ، نعلم سابقاً (من 5-3-14 و 5-4-7) أن

$$(P(V), \subset, \wedge, \vee) \text{ و } (sub(V), \subset, \wedge, \vee) \text{ كل منهما شبكة.}$$

هل $(sub(V), \subset, \wedge, \vee)$ شبكة جزئية من $(P(V), \subset, \wedge, \vee)$ ؟

