$$= \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + \int \frac{2dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$= \ln|e^x + e^{-x}| + \int \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx$$

$$= \ln|e^x + e^{-x}| + \int \frac{\frac{2dt}{1-t}}{\frac{1+t^2}{1-t^2}}$$

$$= \ln|e^x + e^{-x}| + \int \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \ln|e^x + e^{-x}| + 2\int \frac{dt}{1+t^2} = \ln|e^x + e^{-x}| + 2\operatorname{arctg} t + c$$

$$= \ln|e^x + e^{-x}| + 2\operatorname{arctg} \operatorname{th} \frac{x}{2} + c$$

si

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{1 - \operatorname{th}^2 x}{\frac{1}{\operatorname{ch} x}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\operatorname{th}(x) = t \Rightarrow (1 - \operatorname{th}^2 x)\, dx = dt$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = (1 - \operatorname{th}^2 x) = 1 - t^2$$

$$* \quad I = \int \frac{e^x \operatorname{ch} x - e^{-x}}{e^{2x} - 1} = \int \frac{e^x \frac{[e^x + e^{-x}]}{2} - e^{-x}}{e^{2x} - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x} + 1 - 2e^{-x}}{e^{2x} - 1} dx$$

$$e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{t^2 + 1 - 2t}{t^2 - 1}\,\frac{dt}{t}$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{t^3 + t - 2}{t^2(t^2 - 1)}\,dt = \frac{1}{2}\left[\int \frac{A}{t-1}\,dt + \int \frac{B}{1+t}\,dt + c\int \frac{dt}{t} + d\int \frac{dt}{t^2}\right]$$

$\int \sqrt{x^2 - a^2}$ أولر الأول والثالث

$\int \sqrt{a^2 - x^2}$ أولر الثاني والثالث

$\int \sqrt{x^2 + a^2}$ أولر الأول والثاني

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$$

$$= (Ax + b)\sqrt{a^2 - x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = A\sqrt{a^2 - x^2} + (Ax + B)\left(\frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$a^2 - x^2 = A(a^2 - x^2) + (Ax^2 + Bx) + \lambda$$

$$-1 = -2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$0 = -B \Rightarrow B = 0$$

$$a^2 = a^2 A + \lambda$$

$$a^2 = \frac{a^2}{2} + \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{a^2}{2}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

المحاضرة الثامنة : ٢٢ / ٣ / ٢٠١٠

تكامل ثنائي الحد التفاضلي :

الشكل العام :

$$I = \int x^m (ax^n + b)^p \, dx \quad : \quad m, n \in Q$$

① [أ] $p \in Z^+$ الأعداد الصحيحة الموجبة

نفك $(ax^n + b)^p$ حسب

$$(x+y)^n = x^n + n x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} y^2 + \dots + y^n$$

[ب] $p \in Z^-$

$$x = t^q$$

حيث q المقام المشترك m, n

مثال :

$$I = \int x^{-\frac{3}{10}} \left(-1 + \sqrt[5]{x}\right)^{-2} dx$$

$p = -2 \qquad m = -\frac{3}{10} \qquad n = \frac{1}{5}$

$$x = t^{10} \Rightarrow dx = 10 t^9 \, dt$$

$$I = 10 \int t^{-3} (-1 + t^2)^{-2} t^9 \, dt$$

$$= 10 \int t^{-3} (-1 + t^2)^{-2} t^9 \, dt$$

$$= 10 \int \frac{t^6}{(t^2 - 1)^2} \, dt$$

درجة البسط > المقام نقسم

$$\begin{array}{r|l} & t^2+2 \\ \hline t^4-2t^2+1 & t^6 \\ & t^6-2t^4+t^2 \\ \hline & 2t^4-t^2 \\ & 2t^4-4t^2+2 \\ \hline & 3t^2-2 \end{array}$$

$$I = 10\int t^2+2 \; dt + 10\int \frac{3t^2-2}{(t^2-1)^2}\; dt$$

$$= 10\frac{t^3}{3} + 20t + 10\left[\int \frac{A}{t-1}\,dt + \int\frac{B\,dt}{(t-1)^2} + \int\frac{C\,dt}{t+1} + \int\frac{D\,dt}{(t+1)^2}\right.$$

$\frac{m+1}{n} \in Z$ $\qquad p \notin Z$ $\qquad$ (٢)

$(ax^n+b) = t^q$ $\quad$ (m,n,p) q المضاعف المشترك للمقامات

$$I = \int x^{\frac{5}{2}}\,(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{4}}\; dx$$

$m = \frac{5}{2} \quad , n = \frac{1}{2} \quad , p = \frac{1}{4} \notin Z$

$$\frac{m+1}{n} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}} = 7 \in Z$$

$$1-x^{\frac{1}{2}} = t^4 \Rightarrow 1-t^4 = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = (1-t^4)^2$$
$$\Rightarrow dx = 2(1-t^4)(-4t^3)\,dt$$

$$I = -8\int (1-t^4)^5\, t\, t^3\,(1-t^4)\; dt$$

$$= -8\int t^4 (1-t^4)^6 \, dt$$

نعود التمرين للحالة الأولى.

③ $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$ $\quad p \notin \mathbb{Z}$

$$\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$$

$$(ax^n + b) = x^n \underbrace{(a + bx^{-n})}_{t^q}$$

نفرض $t^q = (a + bx^{-n})$ حيث q المضاعف المشترك للمقامات p, m, n

$$I = \int x^m \left[x^{np} (a + bx^{-n})^p\right] dx$$

$$= \int x^{m+np} (a + bx^{-n})^p \, dx$$

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(1+x^3)^5}} = \int x^{-2} (1+x^3)^{-\frac{5}{3}} \, dx$$

$m = -2$, $n = 3$, $p = \frac{-5}{3} \notin \mathbb{Z}$

$$\frac{m+1}{n} + p = -\frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -2 \in \mathbb{Z}$$

$$I = \int x^{-2} \left[x^3 (x^{-3} + 1)\right]^{-\frac{5}{3}} dx$$

$$I = \int x^{-2} x^{-5} (x^{-3}+1)^{-\frac{5}{3}} \, dx$$

$$x^{-3}+1 = t^3 \Rightarrow x^{-3} = t^3 - 1$$

$$\Rightarrow x = (t^3-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow dx = -\frac{1}{3}(3t^2)(t^3-1)^{-\frac{4}{3}} \, dt$$

$$I = -\int \underset{x^{-3}}{(t^3-1)} \underset{x^{-4}}{(t^3-1)^{\frac{4}{3}}} \, t^{-5} \, t^2 (t^3-1)^{-\frac{4}{3}} \, dt$$

$$= -\int (t^3-1) t^{-3} \, dt =$$

$$= -\int (1-t^{-3}) dt = -t - \frac{t^{-2}}{2} + c$$

$$= -\sqrt[3]{x^{-3}+1} - \frac{\left(\sqrt[3]{x^{-3}+1}\right)^{-2}}{2} + c$$

مثال©:

$$J = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$= \int x^{-\frac{1}{2}} (1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} \, dx$$

$$p = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z} \qquad \frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$$

إذاً الحالة الثانية

$$1 + x^{\frac{1}{4}} = t^{12} \Rightarrow x^{\frac{1}{4}} = t^{12} - 1 \Rightarrow x(t^{12} - 1)^{4}$$

$$\Rightarrow dx = 48\, t^{11} (t^{12} - 1)^{3}\, dt$$

$$J = 48 \int (t^{12} - 1)^{-12}\, t^{4}\, t^{11}\, (t^{12} - 1)^{3}\, dt$$

$$= 48 \int (t^{12} - 1)\, t^{15}\, dt$$

$$= 48 \int (t^{27} - t^{15})\, dt$$

$$= 48 \left(\frac{t^{28}}{28} - \frac{t^{16}}{16} \right) + C$$

$$= 48 \frac{(1 - x^{\frac{1}{4}})^{\frac{28}{12}}}{28} - 3 (1 - x^{\frac{1}{4}})^{\frac{16}{12}} + C$$

$$K = \int x^{-11} (1 + x^{4})^{-\frac{1}{2}}\, dx$$: (۳) حل

$m = -11, \quad n = 4, \quad p = -\frac{1}{2} \notin Z$

$\frac{m+1}{n} = \frac{-10}{4} \notin Z$

$\frac{m+1}{n} + p = -\frac{10}{4} - \frac{1}{2} = -3 \in Z$

$$K = \int x^{-11}\, x^{-2}\, (x^{-4} + 1)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$K = \int x^{-13} (x^{-4}+1)^{-\frac{1}{2}} \, dx$$

$$x^{-4}+1 = t^2 \Rightarrow x^{-4} = t^2-1 \Rightarrow x = (t^2-1)^{-\frac{1}{4}}$$

$t = \sqrt{x^{-4}+1}$

$$\Rightarrow dx = -\frac{1}{4}(t^2-1)^{-\frac{5}{4}}(2t) \, dt$$

$$K = -\frac{1}{2}\int (t^2-2)^{\frac{13}{4}} \, t^{-1} \, t \, (t^2-1)^{-\frac{5}{2}} \, dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int (t^2-1)^2 \, dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int (t^4-2t^2+1) \, dt$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - \frac{1}{2}t + C$$

$$= -\frac{1}{10}\sqrt{(x^{-4}+1)^5} + \frac{\sqrt{(x^{-4}+1)^3}}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{x^{-4}+1} + C$$

التكاملات المتسامية:

$\int f(x) \, Ln \, dx$ أو $\int (\arcsin x) f(x) \, dx$

كون تابع عكسي مثلثي أو مثلثي أو لغارتمي فنكامل بالتجزئة.

نفرض:

$Ln\, x = u$
$\arcsin x = u$
$\arccos x = u$
$\text{arc}\, ch = u$

أي الأمثلية لهم.

مثال،

$$I = \int \frac{x\, Lnx}{(1+x^2)^3}\, dx$$

$$Lnx = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du$$

$$\frac{x\, dx}{(1+x^2)^3} = dv \Rightarrow v = \int \frac{dt}{2t^3} = \frac{1}{2}\int t^{-3}\, dt$$

نفرض $1+x^2 = t$

$$\Rightarrow 2x\, dx = dt$$

$$= +\frac{1}{2}\,\frac{t^{-2}}{-2} = \frac{-1}{4t^2}$$

$$= \frac{-1}{4(1+x^2)^3}$$

$$I = \frac{-Lnx}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2}$$

نفرض J

$$J = \int \frac{dx}{x(1+x^2)^2} = \int \frac{A}{x}\, dx + \int \frac{(bx+c)}{1+x^2}\, dx + \int \frac{Dx+e}{(1+x^2)^2}\, dx$$

نضرب ب 2 ونقسم على 2 فينتج لوغاريتم

$A=1$, $B=1$, $c=0$, $e=0$

هنا يبقى D خارجاً

فينتج مثل الأصل تقريباً

ونكمل القوة (2) ونكامل بالتجزئة

ثم نتابع الحل

↓

مضيفة :

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$$

$$\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x}\, dx$$