بسم الله الرحمن الرحيم

مادة التحليل الدالي 1 مبرهنات وتعاريف

الفصل الأول: الفضاءات المترية

Definition:الفضاء المتري:

هو زوج (X,d) حيث X مجموعة و d مترك(مسافة) على X أي دالة معرفة على $X \times X$ بحيث تحقق الخواص التالية:

أيا كان $x,y,z \in X$

1- $d(x,y) \geq 0$

2- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3- $d(x,y) = d(y.x)$

4- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Examples:

1- المحور الحقيقي: والمترك المعرف عليه هو المترك المألوف القيمة المطلقة $d(x,y) = |x-y|$

2- فضاء المتتاليات l^∞

و هو مجموعة كل المتتاليات المحدودة أي التي تحقق $x = (\mu_i); |\mu_i| \leq c_x$ والمترك المعرف عليه هو $d(x,y) = sup_{i\in N}|\mu_i - \varphi_i|$

3- فضاء الدوال المستمرة $C[a,b]$ ودالة المسافة المعرفة على هذا الفضاء تعطى

4- فضاء المتتاليات S: يتألف من جميع المتتاليت المحدودة منها و غير المحدودة أما دالة المسافة فتعطى $d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\mu_i - \varphi_i|}{1+|\mu_i-\varphi_i|}$

5- فضاء الدوال المحدودة $B(A)$:

كل عنصر x من $B(A)$ هو دالة معرفة ومحدودة على A ودالة المسافة هي $\mu_i d(x,y) = \sup_{t\in A}|x(t) - y(t)|$

6- الفضاء l^p:

ليكن p عدد حقيقي مثبت بحيث $p \geq 1$ نعرف كل عنصر x من l^p بانه متتالية $x = (\mu_i) = (\mu_1, \mu_2, \dots.)$ من الأعداد بحيث تكون المتسلسلة $\sum_1^\infty |\mu_i|^p < \infty$ x متقاربة. ويعرف المترك كما يلي: $d(x,y) = (\sum_1^\infty |\mu_i - \varphi_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

ويسمى بشكل خاص بفضاء هيلبرت عندما $p = 2$

بعض المتباينات الهامة والمستخدمة في براهين المسافات السابقة

1-متباينة هولدر للمجاميع:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\mu_i \varphi_i| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^p)^{1/p} (\sum_{m=1}^{\infty} |\varphi_m|^q)^{1/q}$$

Note: بوضع $p = q = 2$ نحصل على متباينة كوشي شفارتز

2-متباينة منكوفسكي:

$$\left(\sum_{\circ=1}^{\infty}|\mu_i+\varphi_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\mu_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi\mu_i|^p\right)^{1/p}$$

Definitionالتطبيقات المستمرة:

ليكن $X=(X,d)$ و$Y=(Y,\bar{d})$فضاءين متريين. نقول عن تطبيق $T: X \to Y$أنه مستمر في النقطةx_0 من Xإذا وجد لكل عدد موجبε عدد موجبδ بحيث أيا كانت النقطة $x \in X$التي تحقق الشرط

$d(x,x_0)<\delta$ فإن$\bar{d}(T_x,T_{x_0})<\varepsilon$

ونقول عن Tأنه مستمر اذا كان مستمرا في كل نقطة منX.

Theorem (1)

الشرط اللازم والكافي لكي يكون Tمن فضاء متري X في فضاء متريY مسَتمرا هو أن يكون الخيال العكسي لكل مجموعة مفتوحة في Y (وفقT)مفتوحة في X.

:Lemma

إذا كان (X,d)فضاءا متريا فإن:

1-كل متتالية متقاربة فيX تكون محدودة ونهايتها وحيدة.

2-اذا كان $Xn \to x$ و $Yn \to y$ في Xفإن $d(Xn,Yn) \to d(x,y)$

Definition:الفضاء الفصول

نقول عن فضاء متريX أنه فصول اذا حوى مجموعة جزئية عدودة وكثيفة فيه.

Theorem (2)

إذا كانتA مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متري (X,d)وكانت $\bar{A}$ لصاقتها فإن:

1 -الشرط اللازم والكافي كي تكون $x\epsilon\bar{A}$هو أن توجد متتالية (xn) من عناصر X بحيث أن: $xn \to x$

2 -الشرط اللازم والكافي كي تكون A مغلقة هو التالي:إذا كانتxn متتالية من عناصر A متقاربة منx فإن $x\epsilon A$

Theorem (3)

الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاءM الجزئي من فضاء متري تامX فضاء تاما هو أن تكون المجموعةM مغلقة في X.

Theorem (4)

الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق$T: X \to Y$ من فضاءX متري الى فضاءY متري مستمرا في نقطةx من X هو أن يقتضي الشرط$xn \to x$ الشرط$T: xn \to x$

Definition:التطبيق الإيزومتري

ليكن $X=(X,d)$ و $Y=(Y,d')$ فضائيين متريين

1 -نقول عن التطبيق $T:X\to Y$ أنه إيزومتري اذا حافظ على المسافات أي

$$d'(Tx,Ty)=d(x,y)$$

2 -ونقول عن الفضاء X أنه إيزومتري مع الفضاء Y اذا وجد تطبيق إيزومتري متباين وغامر من X على Y

Theorem (5)

مبرهنة التمام: مبرهنة وجود

يوجد لكل فضاء متري Y فضاء متري تام $\bar{Y}$ يحوي فضاء جزئي w إيزومتري مع Y وكثيف في $\bar{Y}$. أن الفضاء $\bar{Y}$ وحيد إذا غضضنا الطرف عن الفضاءات الإيزومترية معه.

الفصل الثاني: الفضاءات المنظمة فضاءات باناخ

Definition الفضاء المتجهي:

الفضاء المتجهي على حقل K هو مجموعة X غير خالية من العناصر... $x, y, \ldots$ (تدعى متجهات) وهذه المجموعة مزودة بعمليتين جبريتين تدعى هاتان العمليتان جمع متجهي وضرب متجهات بأعداد من الحقل K .

وتحقق هاتان العمليتان ما يلي:

1-الجمع تبديلي تجميعي

2-يوجد صفر يدعى المتجه الصفري 0

3-يوجد لكل متجه x متجه $-x$ بحيث يحقق $x+(-x)=0$

4-الضرب تجميعي وتوزيعي على الجمع.

الفضاء المتجهي الجزئي:

نقول عن مجموعة جزئية Y غير خالية من فضاء متجهي X أنها فضاء متجهي جزئي اذا حققت أيا كان $y_1,y_2\epsilon Y$ وأيا كان العددان α, β فإن $\alpha y_1+y_2\beta\ \epsilon Y$ عندئذ Y فضاء متجهي.

Theorem (1)

إذا كان X فضاء متجهي بعده n فإن لكل فضاء جزئي فعلي Y من X بعدا أقل من n.

Definitions

-الفضاء المنظم:هو فضاء متجهي زود بنظيم.

-النظيم:دالة حقيقية على فضاء Xيرمز لقيمتها في نقطة xمن X بـ$\|x\|$بحيث تحقق ما يلي:

1 -$\|x\| \geq 0$

2 -$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3 -$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

4 -$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ملاحظة: إن النظيم دالة مستمرة أي أن $x \to \|x\|$للفضاء $(X, \|.\|)$ في Rويكون $d(x, y) = \|x - y\|$هو المترك المولد بنظيم.

Lemmaتمهيدية لا تغير الانسحاب:

كل مترك مولد من نظيم على فضاء منظم يجب أن يحقق الخاصتين التاليتين:

1 -$d(x + a, y + a) = d(x, y)$

2 -$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$

تفيد هذه التمهيدة بتحديد ما إذا كان المترك المدروس مولد من نظيم أم لا.

Definition:فضاء باناخ

نقول عن الفضاء المنظم أنه فضاء باناخ إذا كان هذا الفضاء تام.

Theorem(2):مبرهنة الإتمام للفضائات المنظمة:

ليكن$X = (X, \|x\|)$فضاء منظما عندئذ هناك فضاء$\hat{X}$لباناخ وتطبيق إيزومتري A من Xعلى فضاء جزئي Wمن $\hat{X}$وكثيف في$\hat{X}$.إن الفضاء$\hat{X}$وحيد إذا غضضنا الطرف عن الفضاءات الإيزومترية معه.

Definition:الإستقلال الخطي:

نقول عن المجموعة$(x_1, \ldots \ldots, x_2)$ أنها مستقلة خطيا إذا كانت المساواة

$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ محققة فقط عندما $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$

lemmaتمهيدية(التراكيب الخطية):

لتكن$(x_1, \ldots \ldots, x_2)$ مجموعة مستقلة خطيا من المتجهات من فضاء منظمX(ايا كان بعدده)عندئذ يوجد عدد موجبcبحيث تتحقق المتباينة

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots |\alpha_n|) \qquad (c > 0)$$

أيا كانت الأعداد متجهي فضاء $\overset{\text{نظيم}}{\Leftarrow}$ فضاء $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

Theorem:

إذا كانت(x_n) متتالية كوشي من الأعداد الحقيقية عندئذ (x_n)متقاربة.

Proof

ليكن $\epsilon > 0$ عددا مفروضا وليكن N عددا طبيعيا يقابل العدد المفروض ϵ بحيث أنه أيا كان $n.m > N$ تتحقق المتراجحة

$$|x_n - x_m| < {}^{\epsilon}/_{2} \dots\dots\dots\dots\dots (*)$$

ومنه

$$-{}^{\epsilon}/_{2} < x_n - x_m < {}^{\epsilon}/_{2}$$

ومنه

$${}^{\epsilon}/_{2} + x_m < x_n < {}^{\epsilon}/_{2} + x_m$$

بتثبيت عدد ما $m > N$ نجد من المتراجحة الاخيرة أن المتتالية (x_n) محددودة.

عندئذ حسب مبرهنة بولزانو فايرشتراس يمكننا أن نستخلص من (x_n) متتالية جزئية (x_{n_k}) بحيث أن $x_{n_k} \to c$ عندما $k \to \infty$

من أجل العدد المفروض سابقا $\epsilon > 0$ يوجد عددطبيعي k_0

بحيث

$$\forall k > k_0 \Rightarrow |x_{n_k} - c| < {}^{\epsilon}/_{2} \dots\dots\dots\dots\dots (**)$$

ولنبرهن أن (x_n) تتقارب من c

نختار k_0 بحيث يكون $n_{k_0} > N$

وعندئذ إذا وضعنا في المتراجحة $(*)$ $m = n_k$

نجد أن :

$$\forall k > k_0, \forall n > N \Rightarrow |x_{n_k} - x_n| < {}^{\epsilon}/_{2} \dots\dots\dots\dots\dots (***)$$

ومن المتراجحتين $(***)$ و $(**)$ نستنتج انه أيا كان $n > N$ فإن :

$$|x_n - c| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - c| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| < {}^{\epsilon}/_{2} + {}^{\epsilon}/_{2} = \epsilon$$

Note:

نستنتج من المبرهنة السابقة أن الفضاء R هو فضاء تام لأن كل متتالية كوشية فيه تكون متقاربة.

ويمكن إثبات تمام الفضاء R استنادا الى الفضاء Q حيث أن R هو تمام الفضاء Q

والحمد لله رب العالمين

i

i من كتاب مدخل الى التحليل الدالي وتطبيقاته لإروين كريزك

Written By:Imran Shamieh Imran.shamia@gmail.com