/ /

7) يفرض أن $\{C_n\}$ متتالية عقدية بحيث:

$$C_n = a_n + i\,b_n$$

وليكن لدينا العدد العقدي: $c = a + ib$.

عندئذ الشرط اللازم والكافي لكي تكون $\{C_n\}$ متقاربة من C هو:

$$a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a \quad \wedge \quad b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} b$$

أمثلة:

1- ادرس تقارب المتتالية التالية:

$$\{z_n\} = \frac{(1-2i)^n}{n}$$

الحل:

$$z_n = \frac{(1-2i)^n}{n} \quad , \quad |z_n| = \left|\frac{(1-2i)^n}{n}\right|$$

$$|(1-2i)^n| = (\sqrt{1+4})^n = (\sqrt{5})^n$$

$$\Rightarrow |z_n| = \frac{(\sqrt{5})^n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

المتتالية متباعدة.

2- أوجد نقطة تقارب المتتالية التالية:

$$\{z_n\} = \frac{n^2 + i\,n^3}{n^3 - 1}$$

الحل:

$$z_n = \frac{n^2 + i n^3}{n^3 - 1} = \frac{n^2}{n^3 - 1} + i\,\frac{n^3}{n^3 - 1}$$

$$a_n = \frac{n^2}{n^3 - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 = a$$

$$b_n = \frac{n^3}{n^3 - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 = b$$

عندئذ:

$$z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} c = a + ib$$

$$\Rightarrow z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} i$$

/ /

نتيجة:

إذا كانت لدينا المتتالية $\{z_n\}$ حيث:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

عندئذ تكون:

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$$

والعكس غير صحيح بالضرورة.

مثال:

لتكن لدينا المتتالية:

$$\{z_n\} = \{(-1)^n\}$$

نلاحظ أن:

$$|z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

بينما $\{z_n\}$ ليست متقاربة.

تعريف:

نقول عن المتتالية العقدية $\{z_n\}$ أنها تنتهي إلى اللانهاية عندما ينتهي مقلوبها إلى الصفر:

أي: $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ عندما $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0$

نتيجة:

إذا كانت $\{z_n\}$ متتالية عقدية تنتهي إلى اللانهاية عندئذ فإن طويلتها تنتهي إلى اللانهاية:

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \implies |z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

مثال:

أدرس تقارب المتتالية العقدية التالية:

$$\{z_n\} = \{a^n\}$$

والمطلوب: ناقش حالات التقارب حسب قيم a.

الحل:

1) $|a| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

المتتالية متقاربة ونهايتها تساوي الصفر.

2) $|a| = 1$

عندئذ: $a = e^{i\theta}$

$$a^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

نميز حالتين:

- $\theta = 0$

$$a_n = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = 1$$

تكون المتتالية متقاربة ونهايتها تساوي الواحد.

- $\theta \neq 0$ عندئذ لا توجد نهاية وتكون a_n متباعدة.

3) $|a| > 1$

عندئذ: $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$

والمتتالية في هذه الحالة متباعدة.

المتسلسلات العقدية:

ليكن $\{z_n\}$ متتالية عقدية عندئذ نسمي المجموع:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n + \dots$$

بمتسلسلة عقدية لانهائية ونرمز لها بالرمز: $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$

ونقول أن المتسلسلة العقدية متقاربة ومجموعها يساوي a

إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها $\{S_n\}$ متقاربة من a ونكتب

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a \iff S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

أما إذا كانت $\{S_n\}$ متباعدة فإننا نقول عندئذ أن المتسلسلة العقدية متباعدة.

تمرين:

ادرس تقارب المتسلسلة الهندسية

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

الحل:

نأخذ متتالية المجاميع الجزئية.

$$S_n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1}$$

نضرب الحدود بـ z فنجد:

$$z \cdot S_n = z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots + z^{n-1} + z^n$$

فإذا طرحنا:

$$S_n - z\cdot S_n = 1 - z^n \Rightarrow S_n(1-z) = 1 - z^n$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{z^n}{1-z}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-z} - \lim_{n\to\infty}\frac{z^n}{1-z}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z} - 0 = \frac{1}{1-z}$$ عندما $|z|<1$:

إذاً المتسلسلة المعروضة متقاربة ومجموعها:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad ; \quad |z|<1$$

خواص المتسلسلات العقدية:

1- نقول عن متسلسلة عقدية أنها متقاربة إذا كان حدها العام يسعى

/ /

إلى الصفر :

$$\lim_{n \to \infty} z_n = 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ متقاربة}$$

2- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ متقاربة ومجموعها يساوي a عندئذ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a z_n$ تكون متقاربة.

3- لتكن لدينا المتسلسلتان المتقاربتان :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \quad \wedge \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$$

عندئذ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \mp b_n) = a \mp b$$

4- لتكن لدينا المتتالية العقدية $\{z_n\}$، حيث :

$$z_n = a_n + i b_n$$

عندئذ فإن الشرط اللازم والكافي لكي تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ هو أن تتقارب المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

ونقول :

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ متقاربة} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ متقاربة} \end{cases} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n = a_n + i b_n \text{ متقاربة}$$

تعريف :

تسمى المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ بمتسلسلة القيمة المطلقة للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ونقول بأن $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ متقاربة إطلاقاً أو متقاربة بالإطلاق إذا تقاربت متسلسلة قيمها المطلقة $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$

/ /

نتائج :

* إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متقاربة إطلاقاً عندئذ تكون متقاربة ولكن العكس غير صحيح بالضرورة .
* إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة وكانت متسلسلة قيمها المطلقة متباعدة أو غير متقاربة مطلقاً فإننا عندئذ نسمي تقارب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقارباً شرطياً .

تنويه :

إن دراسة تقارب المتسلسلات العقدية يؤول إلى دراسة تقارب المتسلسلات الحقيقية وهذا يدعونا إلى دراسة اختبارات تقارب المتسلسلات .

اختبارات التقارب :

1 اختبار النسبة "دالامبير" :

نوجد النهاية :

$$P = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

حيث $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ونميز الحالات :

* $P < 1$ تكون المتسلسلة متقاربة .
* $P > 1$ تكون المتسلسلة متباعدة .
* $P = 1$ فشل معيار .

2 اختبار كوشي الجذر النوني :

من أجل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ حيث $a_n \geq 0$

نوجد النهاية :

$$q = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

ونميز الحالات التالية:

★ $q < 1$ المتسلسلة متقاربة.

★ $q > 1$ المتسلسلة متباعدة.

★ $q = 1$ منشل معيار.

③ اختبار المقارنة:

لتكن لدينا المتسلسلات:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ذوات الحدود غير السالبة

ونقول:

★ إذا كانت: $a_n \geq b_n$ من أجل جميع قيم n ابتداء من قيمة معينة N

عندئذ إذا كانت المتسلسلة $\sum b_n$ متباعدة فإن $\sum a_n$ متباعدة.

★ وإذا كانت: $c_n \geq a_n$ من أجل جميع قيم n ابتداء من قيمة معينة N

عندئذ إذا كانت $\sum c_n$ متقاربة فإن $\sum a_n$ تكون متقاربة.

★ وإذا أوجدنا النهاية:

$$P = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$$

عندئذ $\sum a_n$ ، $\sum b_n$ هما من نوع واحد أي أنهما متقاربتان معاً

أو متباعدتان معاً.

④ اختبار راب:

لتكن لدينا المتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ حيث $a_n \geq 0$

نوجد النهاية: $\mathcal{R} = \lim_{n \to \infty} \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right]$ ونميز الحالات التالية:

★ $\mathcal{R} > 1$ المتسلسلة متقاربة.

★ $\mathcal{R} < 1$ المتسلسلة متباعدة.

★ $\mathcal{R} = 1$ منشل معيار

/ /

تمارين:

ادرس تقارب المتسلسلات العقدية التالية،

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3-4i}{4}\right]^n$

الحل:

نجري اختبار الجذر النوني:

$$C = \lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{\left(\frac{3-4i}{4}\right)^n}\right| = \left|\frac{3-4i}{4}\right| = \frac{5}{4} > 1$$

المتسلسلة متباعدة.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+2i)^n}{n+3}$

الحل:

نجري اختبار دالامبير:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(3+2i)\cancel{(3+2i)^n}}{n+4} \cdot \frac{n+3}{\cancel{(3+2i)^n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n+3}{n+4} \cdot |3+2i|\right] = |3+2i| = \sqrt{13} > 1$$

المتسلسلة متباعدة.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,(e-i)^n}$

الحل:

نجري اختبار دالامبير:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot\cancel{(n!)}\cdot\cancel{(e-i)^n}(e-i)} \cdot \frac{\cancel{n!}\,\cancel{(e-i)^n}}{n^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cancel{(n+1)}\,(n+1)^n}{\cancel{(n+1)}\,(n)^n \cdot (e-i)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left|\frac{1}{e-i}\right| = \frac{e}{|e-i|}$$

$$\ell = \frac{e}{\sqrt{e^2+1}} < 1 \Leftarrow$$ المتسلسلة متقاربة

/ /

④ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)\, i^{n}}{n^{3}}$$

الحل:

⑤ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} + i\sqrt{n}}{n+1}$$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} + i\sqrt{n}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n}}{n+1} + i\,\frac{\sqrt{n}}{n+1} \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n+1}}_{X_n} + i \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}}_{y_n}$$

نلاحظ أن: $X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n+1}$ هي متسلسلة متناوبة وحدها العام: $\frac{(-1)^{n}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ كما نلاحظ أن الحد العام متناقص بالقيمة المطلقة إذاً حسب معيار لايبنتز هي متقاربة

أما بالنسبة للمتسلسلة: $y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ نقارنها مع $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]$$

/ /

فنجد :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

إذاً المتسلسلتان من نوع واحد.

وبما أن $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة إذاً y_n متباعدة وبهذا تكون المتسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{n+1}=x_n+i\,y_n$$

متباعدة أيضاً.

متتاليات ومتسلسلات التوابع العقدية :

إذا كانت حدود متسلسلة عقدية ما هي توابع عقدية فإننا نسمي هذه المتسلسلة: « المتسلسلة العقدية التابعية »

ونكتب :

$$f_1(z)+f_2(z)+f_3(z)+\dots+f_n(z)+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$$

وإذا رمزنا لمتتالية المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة بالرمز $S_n(z)$ عندئذ الحد العام هو :

$$S_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\dots+f_n(z)$$

التقارب المنتظم

تعريف :

تكون المتسلسلة التابعية متقاربة بانتظام في المنطقة D من التابع $S(z)$ إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية لها $S_n(z)$ متقاربة في D وهذا يعني :

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N_{(\varepsilon)}\in\mathbb{N}\;;\;|S_n(z)-S(z)|<\varepsilon\quad\forall z\in D$$

وذلك من أجل : $n>N_{(\varepsilon)}$.

اختبار فايرشتراس في التقارب المنتظم:

نقول أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ متقاربة مطلقاً وبانتظام على ساحة تعريفها D إذا كانت: $|f_n(z)| < M_n$ حيث: $n=1,2,\ldots$

M_n: هي أعداد حقيقية موجبة ومستقلة عن النقاط $z\in D$ وتحقق أن المتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ متقاربة.

خواص متسلسلات التوابع المتقاربة بانتظام:

1- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ متقاربة بانتظام في المنطقة D وإذا كانت حدود هذه المتسلسلة توابع مستمرة في D. وكان $S(z)$ هو مجموع هذه المتسلسلة وكان C منحنياً ما يقع في D عندئذ:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_C f_n(z)\,dz\right)$$

2- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ متقاربة بانتظام في المنطقة D وإذا كانت حدود هذه المتسلسلة توابع مستمرة في D. فإن المجموع $S(z)$ لهذه المتسلسلة هو أيضاً تابع مستمر في D.

3- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ متقاربة في المنطقة D من التابع $f(z)$، وكانت حدود هذه المتسلسلة قابلة للاشتقاق ومستمرة في D، وكانت المتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z)$ متقاربة بانتظام من أجل كل: $z\in D$ عندئذ:

$$S'(z) = \frac{dS(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z)$$

هذا يعني أنه نستطيع في دائرة تقارب المتسلسلة مكاملتها واشتقاقها حداً حداً.

/ /

تمثيل التوابع التحليلية بمتسلسلات القوى:

متسلسلة القوى هي متسلسلة عقدية غير منتهية من الشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

حيث: C_n والتي ندعوها «أمثال النشر أو معاملات النشر» هي أعداد عقدية.

a: والذي ندعوه «مركز متسلسلة القوى» هو عدد عقدي أيضاً

وتحدد منطقة تقارب متسلسلة القوى بالاعتماد على المعاملات.

ملاحظة:

يوجد لكل متسلسلة قوى عدد حقيقي موجب r بحيث تكون متسلسلة القوى متقاربة من أجل $|z-a|<r$ ومتباعدة من أجل $|z-a|>r$.

أما من أجل: $|z-a|=r$ فقد تكون المتسلسلة عندئذ متقاربة وقد تكون متباعدة.

منطقة التقارب:

- نسمي المنطقة $|z-a|<r$ بمنطقة أو دائرة تقارب متسلسلة القوى.

ونسمي r نصف قطر التقارب.

- إذا كانت متسلسلة القوى متقاربة في كل نقطة من المستوي العقدي فإننا نقول أن نصف قطر التقارب في هذه الحالة هو: $r=\infty$

- إذا كانت متسلسلة القوى متقاربة في النقطة a فقط فإننا نقول أن نصف قطر التقارب في هذه الحالة هو: $r=0$

- يُعطى نصف قطر التقارب بالقانون: $r=\frac{1}{k}$ حيث:

$$K=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| \quad \text{أو} \quad K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n}$$

/ /

تنويه:

إن مجموع متسلسلة القوى هو تابع تحليلي في دائرة التقارب.
ونستطيع في دائرة تقارب متسلسلة القوى مكاملتها واشتقاقها حداً حداً.

المحاضرة التاسعة الأربعاء 14 / 11 / 2012

تذكرة بمجموعة من التعاريف:

تعريف (1) [المنطقة]

إذا كانت D مجموعة مفتوحة ومترابطة فإننا عندئذ ندعوها «المنطقة».

تعريف (2) [المجموعة المترابطة]

هي مجموعة يمكن وصل أي نقطتين منها بخط منكسر واقع كلياً داخلها.
وبعبارة أخرى نقول: ان المجموعة المترابطة هي مجموعة لا يمكن تقسيمها
إلى مجموعتين D_1 ، D_2 تحققان:

$$D_1 \neq \phi \ , \ D_2 \neq \phi \ , \ D_1 \cap D_2 = \phi \ , \ D_1 \cup D_2 = D$$

تعريف (3) [المجموعة المفتوحة]

نقول عن مجموعة D أنها مفتوحة إذا كانت كل نقاطها داخلية فيها أي
إذا كانت D هي اجتماع لجميع جوارات نقاطها.

تعريف (4) [النقطة الداخلية]

نقول عن النقطة a أنها داخلية في المجموعة D إذا كانت تنتمي إلى المجموعة
مع جوار لها.

مبرهنة كوشي أدمار:

يعطى نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ بإحدى
الصيغ التالية:

/ /

① $l = \lim_{n \to \infty} |\sqrt[n]{c_n}|$, $r = \frac{1}{l}$

② $l = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$, $r = \frac{1}{l}$

③ $l = \overline{\lim}_{n \to \infty} |\sqrt[n]{c_n}|$, $r = \frac{1}{l}$

④ $l = \overline{\lim}_{n \to \infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$, $r = \frac{1}{l}$

إن الرمز $\overline{\lim}$ هنا نعني منه النهاية العليا.

تمارين (١)

ادرس تقارب كل من المتسلسلات التالية ثم احسب نصف قطر تقاربها:

① $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (z-1)^n$

الحل:

هي متسلسلة قوى ساحة تقاربها أقراص دائرية مراكزها هي مراكز تلك المتسلسلات $(1,0)$

$C_n = n^n$

$l = \lim_{n \to \infty} |\sqrt[n]{n^n}| = \lim_{n \to \infty} n = \infty$.

المتسلسلة متباعدة.

نصف قطر تقاربها: $r = \frac{1}{\infty} = 0$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (z-1)^n$

الحل:

هي متسلسلة قوى ساحة تقاربها أقراص دائرية مراكزها هي مركز هذه المتسلسلة $(1,0)$.

$$C_n = \frac{1}{n^n}$$

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

المتسلسلة متقاربة في كامل المستوى العقدي.

نصف قطر التقارب: $r = \frac{1}{0} = \infty$

③ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+i)^n$

الحل:

$$C_n = (-1)^n$$

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|-1|^n} = |-1| = +1 \Rightarrow r = 1$$

المتسلسلة متقاربة مطلقاً في القرص:

$$|z+i| < 1$$

④ $\sum_{n=0}^{\infty} [4+(-1)^n]^n (z+2)^n$

الحل:

$$C_n = [4+(-1)^n]^n$$

لاحظ أنه عندما: n فردي عندئذ:

$$C_n = (4-1)^n = 3^n$$

وعندما n زوجي عندئذ:

$$C_n = (4+1)^n = 5^n$$

في حالة كهذه لا يمكن حساب النهاية العادية ولهذا نلجأ إلى حساب النهاية العليا:

$$\ell = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{5^n} = 5 \Rightarrow r = \frac{1}{5}$$

المتسلسلة متقاربة مطلقاً في القرص:

$$|z+2| < \frac{1}{5}$$

تمارين (2)

ادرس تقارب كل من المتسلسلات التالية:

$\boxed{1}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$$

الحل:

نستخدم اختبار المقارنة:

لدينا: $b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متسلسلة متقاربة

ولنوجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\frac{e^{in}}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2}{e^{in}} = 1$$

المتسلسلتان من نوع واحد إذاً المفروضة متقاربة.

$\boxed{2}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$$

الحل:

$$C_n = \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$$

ونلاحظ أن:

$$e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}}{n} = \underbrace{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}}_{x_n} + i\underbrace{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}}_{y_n}$$

إن المتسلسلة: $x_n = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$ متباعدة في التحليل الحقيقي

بينما المتسلسلة: $y_n = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}$ متقاربة في التحليل الحقيقي

إذاً المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i\sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

هي متسلسلة متباعدة.

/ /

تمارين (3):

ادرس تقارب كل من المتسلسلات التالية ثم أوجد نصف قطر تقاربها.

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n!}$$

الحل:

نطبق معيار دالامبير:

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot (n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{2n!}{n! \cdot n!} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \right| = \frac{1}{4} < 1$$

المتسلسلة متقاربة، نصف قطر تقاربها.

$$r = \frac{1}{\ell} = 4$$

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

الحل:

نطبق معيار دالامبير:

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)(-1)^n \cdot 3^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1) \cdot \cancel{3^{2n+1}} \cdot 3^2}{(2n+3)(2n+2) \cdot \cancel{3^{2n+1}}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{-3^2}{(2n+3)(2n+2)} \right|$$

$$= (x^2+y^2)(0) = 0 < 1$$

المتسلسلة متقاربة. نصف قطر تقاربها،

$$r = \frac{1}{\ell} = \infty$$

/ /

تمرين (4):

هل المتسلسلة التالية متقاربة إطلاقاً؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{5^{\frac{n}{2}}}$$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(\sqrt{3}+i)^n}{5^{\frac{n}{2}}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(\sqrt{3}+i)^n}{(\sqrt{5})^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{5}}\right)^n\right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left|\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{i}{\sqrt{5}}\right|\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$$

حيث:

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{i}{\sqrt{5}}\right| = \sqrt{\frac{3}{5}+\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

نلاحظ أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$$

هي متسلسلة هندسية أساسها أصغر من الواحد: $\frac{2}{\sqrt{5}} < 1$

فهي متقاربة. وبالتالي المتسلسلة المفروضة متقاربة

إطلاقاً مجموعها يساوي: $\left(\frac{1}{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}\right)$ ويساوي $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$

تمرين (5):

برهن أن تقارب المتسلسلات التالية هو تقارب منتظم:

$\boxed{1}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n|z|}{n^2} \quad \forall z$$

الحل:

بالاعتماد على اختبار فايرشتراس في التقارب المنتظم نجد أن:

$$\left|\frac{\cos n|z|}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} = M_n$$

حيث $\sum \frac{1}{n^2}$ متسلسلة متقاربة إذاً المتسلسلة

المفروضة متقاربة تقارب منتظم.

/ /

$\boxed{2}$ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot z^n \quad ; |z| \leq 4$$

الحل :

نستفيد من كون : $|z| \leq 4$ عندئذ :

$$(|z|)^n \leq 4^n$$

$$2^n \cdot |z|^n \leq 2^n \cdot 4^n$$

$$\frac{2^n \cdot |z|^n}{n!} \leq \frac{8^n}{n!} = M_n$$

ندرس تقارب M_n حسب دالامبير :

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{M_{n+1}}{M_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{8 \cdot \cancel{8^n}}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{8^n}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{8}{n+1} = 0 < 1$$

إذاً $\sum M_n$ متقاربة وبالتالي حسب اختبار فايرشتراس تكون المتسلسلة المفروضة متقاربة تقارب منتظم.

تمرين (6) :

أوجد نصف قطر تقارب المتسلسلة التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (z+1)^n}{n!}$$

الحل :

نلاحظ أن : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \cdot (z+1)^n$ هي متسلسلة قوى مركزها $(-1, 0)$ ساحة تقاربها هي أقراص دائرية مراكزها هي مركز متسلسلة القوى. ولنوجد نصف قطرها :

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\cancel{(n+1)}(n+1)^n}{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n} \right|$$

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)^n}{(n)^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

إذاً نصف قطر التقارب : $r = \frac{1}{e}$

/ /

تمرين (7):

أوجد تمثيلا بمتسلسلة قوى للدالة المذكورة في كل مما يلي:

$\boxed{1}$ $$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

الحل:

بالاستفادة من المتسلسلة الهندسية:

نعلم أن $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=1}^{\infty} t^n$ حيث $|t|<1$

ولنفرض: $t=-z^2$ عندئذ:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-t}$$

$$\Longrightarrow f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . z^{2n}$$

والشرط هو: $|z^2|<1$ لتكون المتسلسلة متقاربة.

$\boxed{2}$ $$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

الحل:

نلاحظ أن التابع: $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ هو مشتق للتابع: ~~F(z)~~

$$F(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$F(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots$$

$$F'(z) = f(z) = 0 + 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1} + \dots$$

وبالتالي نجد:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} \quad ; \quad |z|<1$$

جداء المتسلسلات:

لتكن لدينا المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ حيث:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n + \dots$$

فإذا أخذنا الجداء: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) . \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$

فإننا نحصل على:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

$$= (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots)$$

$$= a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_0 b_2 + a_0 b_3 + \dots + a_0 b_n + \dots$$
$$+ a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + \dots + a_1 b_n + \dots$$
$$+ a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + \dots + a_2 b_n + \dots$$
$$\vdots$$
$$+ a_n b_0 + a_n b_1 + a_n b_2 + a_n b_3 + \dots + a_n b_n + \dots$$

فنجد أن:

$$P_0 = a_0 b_0 \ , \ P_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \ , \ P_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$
$$\dots \dots \ P_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

وبذا نحصل على المتسلسلة:

$$P_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

وهذه المتسلسلة الناتجة ندعوها متسلسلة الجداء أو متسلسلة كوشي.

تمرين:

عيّن متسلسلة الجداء للمتسلسلتين التاليتين:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$$

الحل:

نشكل متسلسلة كوشي:

$$P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta^k}{k!} \cdot \frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$P_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \beta^k \alpha^{n-k}$$

نضرب ونقسم على $n!$:

/ /

$$P_n = \frac{1}{n!}\sum_{K=1}^{n} \frac{n!}{K!\,(n-K)!} \cdot \beta^K \cdot \alpha^{n-K}$$

ولكن: $\frac{n!}{K!\cdot(n-K)!}$ ماهي إلا التوافيق: $C(n,K)$ إذاً:

$$P_n = \frac{1}{n!} \sum_{K=1}^{n} C(n,K) \cdot \beta^K \cdot \alpha^{n-K} = \frac{1}{n!}\,\underbrace{(\alpha+\beta)^n}$$

ثنائي الحد الذي نيوتن.

المحاضرة العاشرة — الإثنين 19 / 11 / 2012

مبرهنة:

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة إلى S.

وكانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة إلى S'.

وكانت متسلسلة الجداء: $P_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ متقاربة إلى σ عندئذٍ:

$$\sigma = S \cdot S'$$

مبرهنة ميرتن:

لتكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة بالإطلاق عندئذٍ تكون متسلسلة الجداء لهما متقاربة ومجموعها يساوي جداء مجموعي المتسلسلتين المفروضتين.

ملاحظة:

إذا أخذنا متسلسلة الجداء لمتسلسلتين متقاربتين فليس من الضروري أن تكون متقاربة.

مثال:

لتكن لدينا المتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ نلاحظ أن هذه المتسلسلة: 1 متناوبة.

2 نهاية حدها العام تساوي الصفر عندما $n \to \infty$

/ /

$$0 \xleftarrow[\infty \leftarrow n]{} \frac{-1}{\sqrt{n+1}} < \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\downarrow 0$$

3

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow |a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \Rightarrow |a_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

نلاحظ أن: $|a_n| > |a_{n+1}|$

إذاً المتسلسلة متناقصة بالقيم المطلقة.

تحققت شروط ليبنز الثلاث فالمتسلسلة متقاربة.

ولنأخذ الجداء: $P_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot a_{n-K}$ وهو جداء متسلسلتين متقاربتين

$$P_n = \sum_{K=1}^{n} a_K \cdot a_{n-K} = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-1)^K}{\sqrt{K+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-K}}{\sqrt{n-K+1}}$$

$$P_n = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(K+1)(n-K+1)}}$$

نلاحظ أن:

$$(K+1)(n-K+1) = Kn - K^2 + \cancel{K} + n - \cancel{K} + 1$$

$$= nK - K^2 + n + 1$$

$$= \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{n}{2}-K\right)^2}_{\text{طرحنا مقدار موجب}} \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2$$

إذاً: $(K+1)(n-K+1) \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2$ بجذر الطرفين

$\sqrt{(K+1)(n-K+1)} \leq \frac{n}{2}+1 = \frac{n+2}{2}$ نأخذ المقلوب

$$\frac{1}{\sqrt{(K+1)(n-K+1)}} \geq \frac{2}{n+2}$$

إن $|P_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(K+1)(n-K+1)}}$ أي مجموع من $0 \to \infty$ إذاً مجموع $(n+1)$ حداً

بأخذ مجموع طرفي المتراجحة لـ $(n+1)$ حداً نجد:

$$|P_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(K+1)(n-K+1)}} \geq (n+1) \cdot \left(\frac{2}{n+2}\right)$$

$$|P_n| \geq \frac{2n+2}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$

الحد العام لا يسعى إلى الصفر عندما $n \to \infty$ إذاً متسلسلة الجداء متباعدة.

تمرين (1):

أدرس تقارب المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot (z-i)^n$$

الحل:

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^n \cdot (z-i)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(2\cdot(z-i))|^n} = 2\cdot|z-i|$$

$$= 2\cdot\sqrt{x^2+(y-i)^2}$$

ونميز الحالتين التاليتين:

$\boxed{1}$ المتسلسلة متقاربة عندما: $C<1$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+(y-i)^2}<1$$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-i)^2<\frac{1}{4}$$

$\boxed{2}$ المتسلسلة متباعدة عندما: $C>1$

$$\Leftrightarrow x^2+(y-i)^2>\frac{1}{4}$$

إذاً منطقة التقارب هي داخل الدائرة التي مركزها $(0,i)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$

تمرين (2):

عيّن منطقة تقارب المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n}$$

الحل:

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{z^{2n}}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{z^2}{2}\right)^n\right|} = \left|\frac{z^2}{2}\right| = \frac{1}{2}\cdot|z^2|$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

ونميز: $\boxed{1}$ المتسلسلة متباعدة عندما: $\frac{1}{2}(x^2+y^2)>1 \Leftrightarrow x^2+y^2>2$

$\boxed{2}$ المتسلسلة متقاربة عندما: $\frac{1}{2}(x^2+y^2)<1 \Leftrightarrow x^2+y^2<2$

إذاً منطقة التقارب هي داخل الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$

/ /

تمرين (3):

لتكن لدينا:

$$U_n = 1 + P\cos\alpha + P^2\cos 2\alpha + P^3\cos 3\alpha + \dots + P^n\cos n\alpha$$

حيث: $n = 0, 1, 2, \dots$ ، $0 < P < 1$

أحسب: $\lim_{n \to \infty} U_n$

الحل:

لنفرض الدالة التالية:

$$V_n = P\sin\alpha + P^2\sin 2\alpha + P^3\sin 3\alpha + \dots + P^n\sin n\alpha$$

عندئذ يكون لدينا:

$$z_n = U_n + iV_n$$

$$z_n = (1 + P\cos\alpha + P^2\cos 2\alpha + \dots + P^n\cos n\alpha) + i(P\sin\alpha + P^2\sin 2\alpha + \dots + P^n\sin n\alpha)$$

$$z_n = 1 + \underline{P\cos\alpha} + \underline{\underline{P^2\cos 2\alpha}} + \dots + P^n\cos n\alpha + \underbrace{iP\sin\alpha} + \underline{\underline{iP^2\sin 2\alpha}} + \dots + iP^n\sin n\alpha$$

بالإصلاح نحصل على:

$$z_n = 1 + P(\cos\alpha + i\sin\alpha) + P^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) + \dots + P^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

وبفرض لدينا العدد العقدي t حيث:

$$t = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

عندئذ نجد أن:

$$\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = t^2$$

وذلك حسب قانون دوموافر

وبشكل مماثل: $\cos n\alpha + i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = t^n$ بالتعويض نجد:

$$z_n = 1 + Pt + P^2t^2 + \dots + P^n t^n = 1 + Pt + (Pt)^2 + \dots + (Pt)^n$$

وهي متسلسلة هندسية أساسها Pt يحقق أن: $|Pt| < 1$

وذلك لأن: $0 \leq |\cos\alpha| \leq 1$

$0 \leq |i\sin\alpha| \leq i$

وفرضاً $P < 1$ ، $|t| = |\cos\alpha + i\sin\alpha| \leq 1 + i < 1$

/ /

$$z_n=\sum_{n=0}^{\infty}(Pt)^n=\frac{1}{1-Pt}$$ إذاً،

بالتعويض:

$$z_n=\frac{1}{1-P(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=\frac{1}{(1-P\cos\alpha)-iP\sin\alpha}$$

ضربنا بالمرافق:

$$z_n=\frac{(1-P\cos\alpha)+iP\sin\alpha}{(1-P\cos\alpha-iP\sin\alpha)(1-P\cos\alpha+iP\sin\alpha)}$$

$$z_n=\frac{1-P\cos\alpha+iP\sin\alpha}{(1-P\cos\alpha)^2+P^2\sin^2\alpha}=\frac{1-P\cos\alpha+iP\sin\alpha}{1-2P\cos\alpha+\underbrace{P^2\cos^2\alpha+P^2\sin^2\alpha}}$$

$$z_n=\frac{1-P\cos\alpha+iP\sin\alpha}{1-2P\cos\alpha+P^2}$$

$$z_n=\underbrace{\frac{1-P\cos\alpha}{1-2P\cos\alpha+P^2}}_{U_n}+i\underbrace{\frac{P\sin\alpha}{1-2P\cos\alpha+P^2}}_{V_n}$$

وبهذا نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\frac{1-P\cos\alpha}{1-2P\cos\alpha+P^2}$$

تمرين (4):

ادرس تقارب المتسلسلة التالية: $\sum_{n=0}^{\infty}(1-i)^n$

الحل:

نطبق معيار الجذر النوني:

$$C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(1-i)^n|}=|1-i|=\sqrt{2}>1$$

إذاً المتسلسلة متباعدة.

تمرين (5):

أوجد مجموع المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^n}$$

/ /

الحل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$

وهي متسلسلة هندسية أساسها،

$$\left|\frac{1+i}{2}\right| < 1$$

اذاً هي متقاربة ومجموعها:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1+i}{2}} = \frac{1}{\frac{2-1-i}{2}} = \frac{2}{1-i}$$

نضرب بالمرافق:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$$

تمرين (6):

ادرس تقارب المتسلسلة، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1+i)^n}$

الحل:

حسب اختبار دالامبير،

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)\cancel{n!}}{(1+i)\cancel{(1+i)^n}} \cdot \frac{\cancel{(1+i)^n}}{\cancel{n!}}\right| = \infty$$

المتسلسلة متباعدة.

تمرين (7):

أوجد تمثيلاً على شكل متسلسلة قوى للدالة :

/ /

تمرين (8):

أوجد منطقة تقارب المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(z+1)^n}$$

الحل:

حسب اختبار دالامبير:

$$D = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n(z+1)^n}{(n+1)(z+1)(z+1)^n} \right| = \frac{1}{|z+1|} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$D = \frac{1}{|z+1|} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}$$

تكون المتسلسلة متقاربة عندما $D<1$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} < 1 \Longleftrightarrow (x+1)^2+y^2 > 1$$

أي أن منطقة تقارب المتسلسلة هي خارج الدائرة التي مركزها $(-1,0)$ ونصف قطرها يساوي (1).

وتتباعد المتسلسلة داخل الدائرة التي مركزها $(-1,0)$ ونصف قطرها يساوي (1).

ونحصل على حالة فشل معيار عندما: $|z+1| = 1 = (x+1)^2+y^2$

أي على محيط الدائرة التي مركزها $(-1,0)$ ونصف قطرها يساوي (1)

ولندرس هذه الحالة: $|z+1| = 1 = |e^{i\theta}|$

$$\Longleftrightarrow z+1 = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$(z+1)^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(z+1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos n\theta - i\sin n\theta}{1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} - i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$$

وهما متسلسلتان حقيقيتان متقاربتان إذاً المفروضة متقاربة

عندما: $D = \frac{1}{|z+1|} = 1$.

تمرين (9):

أوجد منطقة تقارب المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{(z-3i)^{2n}}$$

الحل:

نطبق اختبار دالامبير:

$$D = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)(2)(2^n)}{(z-3i)^{2n} \cdot (z-3i)^2} \cdot \frac{(z-3i)^{2n}}{n \cdot 2^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n+2}{n(z-3i)^2}\right| = \frac{2}{|z-3i|^2} = \frac{2}{|x+i(y-3)|^2}$$

تكون المتسلسلة متقاربة عندما $D<1$

$$\Longleftrightarrow \frac{2}{x^2+(y-3)^2} < 1 \Longleftrightarrow x^2+(y-3)^2 > 2$$

أي أن منطقة تقارب المتسلسلة هي خارج الدائرة التي مركزها $(0,3)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

وتكون المتسلسلة متباعدة داخل محيط الدائرة التي مركزها $(0,3)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$ أي عندما:

$$D>1 \Longleftrightarrow x^2+(y-3)^2 < 2$$

أما في حالة $D=1 \Longleftrightarrow x^2+(y-3)^2=2$ نلجأ إلى الدراسة التالية:

$$D=1 \Longleftrightarrow \frac{2}{|z-3i|^2} = 1$$

$$\Longleftrightarrow |z-3i| = \sqrt{2} = \sqrt{2}\cdot e^{i\theta}$$

بالتعويض في المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{(z-3i)^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{(\sqrt{2}e^{i\theta})^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \cdot e^{2n\theta}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-i(2n\theta)} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,[\cos(2n\theta) - i\sin(2n\theta)]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\cos(2n\theta) - i\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2n\theta)$$

/ /

المحاضرة (11) الأربعاء 21/11/2012

تتمة مسائل وتمارين:

أوجد منطقة تقارب المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n \cdot (z-1)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}$$

ثم أوجد مجموعها.

الحل:

لنأخذ المتسلسلة الأولى:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n \cdot (z-1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2^{n+1} \cdot (z-1)^{n+1}}$$

«ضربنا البسط والمقام بالعدد 2»

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\,(2(z-1))^{-n-1}$$

ونلاحظ أن:

$$\left((2(z-1))^{-n}\right)' = -2n\,(2(z-1))^{-n-1}$$

إذاً:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} (2z-2)^{-n} = -\frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2(z-1))^n}$$

إذاً المتسلسلة الأولى ما هي إلا معكوس مشتق متسلسلة هندسية أساسها $\left[\frac{1}{2(z-1)}\right]$.

وتكون هذه المتسلسلة متقاربة إذا كان: $\left|\frac{1}{2(z-1)}\right| < 1$

$$\frac{1}{|z-1|} < 2 \iff |z-1| > \frac{1}{2}$$

$$\iff \sqrt{(x-1)^2 + y^2} > \frac{1}{2} \iff (x-1)^2 + y^2 > \frac{1}{4}$$

إذاً منطقة تقارب المتسلسلة الأولى خارج الدائرة التي مركزها $(1,0)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$.

ولنوجد المجموع:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2z-2)^n}$$

$$= -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2z-2}}\right) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\frac{2z-2-1}{2z-2}}\right)$$

/ /

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{d}{dz}\left(\frac{2z-2}{2z-3}\right) = -\left[\frac{2(2z-3)-2(2z-2)}{(2z-3)^2}\right]$$

$$= -\left[\frac{\cancel{4z}-6-\cancel{4z}+4}{(2z-3)^2}\right] = -\left[\frac{-2}{(2z-3)^2}\right]$$

إذا :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n (z-1)^{n+1}} = \frac{2}{(2z-3)^2}$$

أما بالنسبة للمتسلسلة الثانية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n.(z-1)^{n-1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3} \cdot \frac{(z-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3} \cdot \left[\frac{z-1}{3}\right]^{n-1}$$

ونلاحظ أن :

$$\left(\left[\frac{z-1}{3}\right]^n\right)' = \frac{n}{3}\left(\frac{z-1}{3}\right)^{n-1}$$

إذاً :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-1}{3}\right)^n$$

وهي متسلسلة هندسية أساسها $\frac{z-1}{3}$ وتكون متقاربة

عندما : $\left|\frac{z-1}{3}\right| < 1$

$$\Longleftrightarrow |z-1| < 3 \Longleftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} < 3$$

$$\Longleftrightarrow (x-1)^2+y^2 < 9$$

أي أن منطقة تقارب المتسلسلة الثانية هي داخل محيط الدائرة

التي مركزها (1 ، 0) ونصف قطرها 3 .

أما بالنسبة للمجموع :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{d}{dz} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-1}{3}\right)^n = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\frac{z-1}{3}}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\frac{3-z+1}{3}}\right)$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{d}{dz}\left(\frac{3}{-z+4}\right) = \frac{3}{(4-z)^2}$$

إذاً المتسلسلة المفروضة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n.(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}$$

منطقة تقاربها تقع بين محيطي الدائرتين اللتين مركز كل منهما (1،0)
ونصف قطر الأولى $\frac{1}{2}$ ونصف قطر الثانية 3 أي منطقة التقارب تحقق

$$\frac{1}{2} < |z-1| < 3$$

أما بالنسبة لمجموع المتسلسلة المفروضة فنجد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{2}{(2z-3)^2} + \frac{3}{(4-3)^2}$$

متسلسلات تايلور وماكلوران:

مبرهنة تايلور:

إذا كان $f(z)$ تابعاً تحليلياً داخل الدائرة C التي مركزها a ونصف قطرها r أي في المنطقة: $|z-a|<r$، عندئذٍ يمكن نشر التابع $f(z)$ في هذه المنطقة بالشكل:

$$\star \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (z-a)^n$$

حيث: $C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

وبالعكس إذا استطعنا كتابة تابع $f(z)$ بالشكل: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (z-a)^n$
عندئذٍ نقول أن التابع $f(z)$ تحليلي في المنطقة $|z-a|<r$
نسمي المتسلسلة ★ بمتسلسلة تايلور للتابع $f(z)$ حول النقطة (a).

متسلسلة ماكلوران:

نسمي المتسلسلة ★ حول النقطة $a=0$ بمتسلسلة ماكلوران للتابع $f(z)$ ونكتبها:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (z)^n$$

نتيجة: إن كل متسلسلة تكون نصف قطر دائرة تقاربها غير معدوم $(a \neq 0)$ هي متسلسلة تايلور للتابع الممثل بتلك المتسلسلة.

/ /

تمارين:

$\boxed{1}$ أوجد منشور ماكلوران للتابع:

$$f(z) = e^{z}$$

الحل:

$$f(z) = e^{z} \quad , \quad f(0) = 1$$
$$f'(z) = e^{z} \quad , \quad f'(0) = 1$$
$$f''(z) = e^{z} \quad , \quad f''(0) = 1$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(z) = e^{z} \quad , \quad f^{(n)}(0) = 1$$
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^{n}$$

$\boxed{2}$ أوجد منشور ماكلوران للتابع:

$$f(z) = \sin z$$

الحل:

$$f(z) = \sin z \quad , \quad f(0) = 0$$
$$f'(z) = \cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad f'(0) = 1$$
$$f''(z) = -\sin z = \sin\left(z + \frac{2\pi}{2}\right) \quad , \quad f''(0) = 0$$
$$f'''(z) = -\cos z = \sin\left(z + \frac{3\pi}{2}\right) \quad , \quad f'''(0) = -1$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(z) = \sin\left(z + \frac{n\pi}{2}\right) \quad , \quad f$$

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^{2} + \frac{f'''(0)}{3!} z^{3} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^{n} + \dots$$

الحدود الزوجية معدومة:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

/ /

3 أوجد نشر ماكلوران للتابع:

$$f(z)=\cos z$$

الحل:

$$f(z)=\cos z \quad , \quad f(0)=1$$
$$f'(z)=-\sin z=\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad f'(0)=0$$
$$f''(z)=-\cos z=\cos\left(z+\frac{2\pi}{2}\right) \quad , \quad f''(0)=-1$$
$$f'''(z)=\sin z=\cos\left(z+\frac{3\pi}{2}\right) \quad , \quad f'''(0)=0$$
$$f^{(4)}(z)=\cos z=\cos\left(z+\frac{4\pi}{2}\right) \quad , \quad f^{(4)}(0)=1$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(z)=\cos\left(z+n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\cdot z+\frac{f''(0)}{2!}\cdot z^2+\frac{f'''(0)}{3!}\cdot z^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot z^n+\cdots$$

نلاحظ أن الحدود الفردية معدومة.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

4 أوجد نشر ماكلوران للتابع:

$$f(z)=\ln(1+z)$$

الحل:

$$f(z)=\ln(1+z) \quad , \quad f(0)=0$$
$$f'(z)=\frac{1}{1+z}=(1+z)^{-1} \quad , \quad f'(0)=1$$
$$f''(z)=(-1)(1+z)^{-2} \quad , \quad f''(0)=-1$$
$$f'''(z)=2(1+z)^{-3} \quad , \quad f'''(0)=2$$
$$f^{(4)}(z)=(-1)(6)(1+z)^{-4} \quad , \quad f^{(4)}(0)=(-1)(6)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(z)=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+z)^{-n} \quad , \quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$