/ /

⑦ التابع الأسي e^z هو تابع دوري ودوره من مضاعفات (($2\pi i$))

أي أن:

$$e^{z+2\pi k i} = e^{z} . e^{2\pi k i} = e^{z}(\cos 2\pi K + i\sin 2\pi K)$$
$$= e^{z}(1+0)$$
$$= e^{z}$$

4 - التوابع المثلثية:

لدينا:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \quad (1)$$
$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z \quad (2)$$

بالجمع نجد:

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z \Rightarrow \boxed{\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}$$

وبطرح 2 من 1 نجد:

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i\sin z$$
$$\Longrightarrow \boxed{\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}$$

وبقسمة ★ على ★ نحصل على:

$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{\cancel{2}i} \times \frac{\cancel{2}}{e^{iz}+e^{-iz}}$$

$$\Rightarrow \boxed{tg\, z = \frac{1}{i}\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}\right)}$$

ويكون

$$\boxed{ctg\, z = i.\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}\right)}$$

وتتمتع التوابع المثلثية بالخواص التالية:

① التابعان: $\sin z$ ، $\cos z$ تابعان دوريان دور كل منهما ((2π)) لأن:

$$\sin(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i}$$
$$= \frac{e^{iz}.e^{2\pi i} - e^{-iz}.e^{-2\pi i}}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz}\cdot(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) - e^{-iz}\cdot(\cos 2\pi - i\sin 2\pi)}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz}(1+0) - e^{-iz}(1-0)}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$$

وكذلك بالنسبة للتابع:

$$\cos(z+2\pi) = \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz}\cdot e^{2\pi i} + e^{-iz}\cdot e^{-2\pi i}}{2}$$

$$= \frac{e^{iz}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) + e^{-iz}(\cos 2\pi - i\sin 2\pi)}{2}$$

$$= \frac{e^{iz}(1+0) + e^{-iz}(1-0)}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

② التابعان $tg\, z$ ، $ctg\, z$ هما تابعان دوريان ودور كل منهما π

$$tg(z+\pi) = \frac{e^{i(z+\pi)} - e^{-i(z+\pi)}}{i\left(e^{i(z+\pi)} + e^{-i(z+\pi)}\right)}$$

$$= \frac{e^{iz}\cdot e^{\pi i} - e^{-iz}\cdot e^{-i\pi}}{i\left(e^{iz}\cdot e^{i\pi} + e^{-iz}\cdot e^{-i\pi}\right)}$$

$$= \frac{e^{iz}(\cos\pi + i\sin\pi) - e^{-iz}(\cos\pi - i\sin\pi)}{i\left(e^{iz}\cdot(\cos\pi + i\sin\pi) + e^{-iz}(\cos\pi - i\sin\pi)\right)}$$

$$= \frac{e^{iz}(-1+0) - e^{-iz}(-1+0)}{i\left(e^{iz}\cdot(-1+0) + e^{-iz}(-1+0)\right)}$$

$$= \frac{\cancel{(-1)}(e^{iz} - e^{-iz})}{\cancel{(-1)}\, i(e^{iz} + e^{-iz})} = tg\, z$$

وكذلك نجد أن:

$$ctg(z+\pi) = ctg\, z$$

③ التابعان: $\sin z$ ، $\cos z$ تحليليان من أجل جميع قيم z في المستوي العقدي ومشتقاتها يعطيان بالعلاقة:

$$\frac{\partial \sin z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)$$

$$= \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{\cancel{i}(e^{iz} + e^{-iz})}{2\cancel{i}} = \cos z$$

$\frac{\partial \cos z}{\partial z} = -\sin z$ وبشكل مماثل نجد أن:

4) التابعان $tg\, z$ ، $ctg\, z$ تابعان تحليليان من أجل جميع قيم z في المستوي العقدي ما عدا قيم z الموافقة لـ: $\begin{cases} \sin z = 0 \\ \cos z = 0 \end{cases}$

أما مشتقاتها فمعطيان على الشكل التالي:

$$\frac{d}{dz}(tg\, z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}\right) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{ie^{iz} + ie^{-iz}}$$

$$= \frac{(ie^{iz} + ie^{-iz})^2 - (i^2 e^{iz} - i^2 e^{-iz})(e^{iz} - e^{-iz})}{(i^2)(e^{iz} + e^{-iz})^2}$$

$$= \frac{-\cancel{e^{2iz}} - \cancel{e^{-2iz}} - 2 + \cancel{e^{2iz}} + \cancel{e^{-2iz}} - 2}{(-1)(e^{iz} + e^{-iz})^2}$$

$$= \frac{4}{(e^{iz} + e^{-iz})^2} = \frac{1}{\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$\Leftrightarrow f(z) = tg\, z \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z}$$

وبشكل مماثل نجد أن:

$$f(z) = ctg\, z \Rightarrow f'(z) = -\frac{1}{\sin^2 z}$$

5- التوابع الزائدية القطعية:

تعرّف التوابع الزائدية في المستوي العقدي من أجل أي عدد عقدي z بالعلاقات التالية:

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = sh\, z$$

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = ch\, z$$

$$\tanh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}} = \frac{sh\, z}{ch\, z} \quad , \coth z = \frac{1}{\tanh z}$$

/ /

وتتمتع التوابع الزائدية بالخواص التالية:

1 إن تابعي $sh\,z$ ، $ch\,z$ تابعان دوريان ودورهما يساوي $(2\pi i)$

حيث أن:

$$sh(z+2\pi i) = \frac{e^{z+2\pi i} - e^{-(z+2\pi i)}}{2}$$
$$= \frac{e^{z}.e^{2\pi i} - e^{-z}.e^{-2\pi i}}{2}$$
$$= \frac{e^{z}(\cos 2\pi i + i\sin 2\pi i) - e^{-z}.e^{-2\pi i}}{2}$$
$$= \frac{e^{z}(1+0) - e^{-z}(1-0)}{2}$$
$$= \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = sh\,z$$

وكذلك الأمر بالنسبة لـ $ch\,z$ إذ نجد أن:

$$ch(z+2\pi i) = ch\,z$$

2 إن $sh\,z$ ، $ch\,z$ هما تابعان تحليليان في جميع نقاط المستوي العقدي، ويعطى مشتقاهما بالعلاقة:

$$w = f(z) = sh\,z$$
$$\Longrightarrow w' = f'(z) = \frac{\partial\, sh\,z}{\partial z}$$
$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}e^{z} - \frac{1}{2}e^{-z}\right) = \frac{1}{2}e^{z} + \frac{1}{2}e^{-z}$$
$$= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = ch\,z$$

إذا:

$$f(z) = sh\,z \Longrightarrow f'(z) = ch\,z$$

أما بالنسبة لـ $ch\,z$:

$$w = f(z) = ch\,z$$
$$\Longrightarrow w' = f'(z) = \frac{\partial\, ch\,z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}e^{z}+\frac{1}{2}e^{-z}\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^{z} - \frac{1}{2}e^{-z}$$
$$= \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = sh\,z$$

إذا:

$$f(z) = ch\,z \Longrightarrow f'(z) = sh\,z$$

6- التابع اللوغاريتمي:

يُعرَّف التابع اللوغاريتمي بأنه معكوس التابع الأسي.

فإذا كان: $z = e^{w}$ عندئذ:

$$w = \ln z$$

حيث: $\left.\begin{array}{l} z = x + iy \\ w = u + iv \end{array}\right\}$

ونجد أن:

$$z = e^{w} = e^{u+iv} = e^{u} \cdot e^{iv}$$

$$= e^{u} \cdot (\cos v + i \sin v)$$

بفرض: $|z| = e^{u}$ عندئذ:

$$z = |z| \cdot (\cos v + i \sin v) = r(\cos v + i \sin v)$$

حيث: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

وبما أن: $e^{u} = |z| \Rightarrow u = \ln|z|$

ولدينا: $v = \theta + 2\pi K$; $K = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$

وبهذا نجد: $\ln z = w = u + iv$

$$\Rightarrow \boxed{\ln z = \ln|z| + i(\theta + 2\pi K)}$$

وهذا يعني أن التابع اللوغاريتمي هو تابع متعدد القيم ولكل عدد عقدي عدد غير منتهي من اللوغاريتمات. وفي حالة: $K = 0$ نحصل على:

$$w = \ln|z| + i\theta$$

وهي ما يسمى: القيمة الرئيسية للوغاريتم

7- التابع العقدي:

$$w = f(z) = z^{a}$$

حيث: $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$

ونعرّف التابع العقدي $w = z^{a}$ على الشكل التالي:

$$w = z^a = e^{a \ln z} = e^{a[\ln|z| + i(\theta + 2\pi k)]}$$

حيث: $k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

وبهذا نجد أن التابع العقدي: $w = z^a$ هو تابع متعدد القيم و القيمة الرئيسية له تقابل: $k = 0$ ونحصل على:

$$w = e^{a[\ln|z| + i\theta]}$$

8- التوابع العقدية العكسية:

وهي معكوسات التوابع المثلثية العقدية.

1- $z = \cos z \Rightarrow w = f(z) = \cos^{-1} z = \arccos z$

2- $z = \sin z \Rightarrow w = f(z) = \sin^{-1} z = \arcsin z$

3- $z = tg\, z \Rightarrow w = f(z) = tg^{-1} z = arctg\, z$

4- $z = ctg\, z \Rightarrow w = f(z) = ctg^{-1} z = arccotg\, z$

وبشكل مشابه فإن معكوسات التوابع الزائدية العقدية هي:

1- $z = sh\, z \Rightarrow w = f(z) = sh^{-1} z = arcsh\, z$

2- $z = ch\, z \Rightarrow w = f(z) = ch^{-1} z = arcch\, z$

3- $z = \tanh z \Rightarrow w = f(z) = \tanh^{-1} z = arctanh\, z$

4- $z = \coth z \Rightarrow w = f(z) = \coth^{-1} z = arccoth\, z$

ملاحظة: "التابع المتعدد القيم":

إذا كانت: $w = f(z)$ علاقة تربط كل عنصر z من مجموعة التعريف A من المستوي العقدي $\mathbb{C}$ بأكثر من عنصر فإن هذه العلاقة ليست تابعاً وحيد التعيين وإنما تدعى: تابعاً كثير التعيين أو تابعاً متعدد القيم لأنها تشكل عدة توابع ضمنية.

مثال:

$$f(z) = z^{\frac{1}{3}}$$

إن هذا التابع متعدد القيم إذ أن له ثلاث قيم تحددها العلاقة:

/ /

$$z_k = r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{3}\right)$$

حيث: $k = 0, 1, 2$

بينما التابع: $f(z) = z^4$

هو تابع وحيد التعيين لأنه من أجل كل قيمة لـ z نحصل على قيمة واحدة للتابع.

وكأمثلة أخرى على التوابع المتعددة القيم نذكر:

«التوابع المثلثية العكسية - التوابع العكسية للتوابع القطعية - التابع العقدي $z^a = w$ - التوابع اللوغاريتمية العقدية».

المحاضرة السادسة

الإثنين 5 / 11 / 2012

تمارين ومسائل متنوعة

1 حلّ المعادلة التالية في $\mathbb{C}$:

$$2 - \cos z = 0$$

الحل:

$$\cos z = 2 \iff \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2$$

$$e^{iz} + e^{-iz} = 4$$

نضرب بـ e^{iz}

$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0$$

بفرض $e^{iz} = m$ نعوض:

$$m^2 - 4m + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 = 12 \implies \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$

$$m_1 = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3} \implies e^{iz} = 2+\sqrt{3}$$

$$iz = \ln(2+\sqrt{3}) \iff \boxed{z = \frac{1}{i}\ln(2+\sqrt{3})}$$

$$m_2 = 2-\sqrt{3} \implies e^{iz} = 2-\sqrt{3} \iff \boxed{z = \frac{1}{i}\ln(2-\sqrt{3})}$$

2 برهن صحة العلاقة التالية:

$$\sin iz = i\, sh\, z$$

الحل:

$$\ell_1 = \sin iz = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{i^2 z} - e^{-i^2 z}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i}$$

$$= \frac{-i^2 e^{-z} + i^2 e^{z}}{2i} = \frac{\cancel{i}(e^{z} - e^{-z})}{2\cancel{i}}$$

$$= i\left(\frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\right) = i\, sh\, z = \ell_2$$

3 برهن صحة العلاقة التالية:

$$\cos iz = ch\, z$$

الحل:

$$\ell_1 = \cos iz = \frac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \frac{e^{i^2 z} + e^{-i^2 z}}{2}$$

$$= \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = ch\, z = \ell_2$$

4 برهن صحة العلاقة التالية:

$$\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$$

الحل:

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy$$

$\cos iy = ch\, y$ ، $\sin iy = i\, sh\, y$ ولكن وجدنا في ② و ③ أن

$$\Rightarrow \sin z = \sin x\, ch\, y + i \cos x\, sh\, y$$

وبهذا نجد أن:

$$\operatorname{Re} \sin z = \sin x \operatorname{ch} y$$
$$\operatorname{Im} \sin z = \cos x \operatorname{sh} y$$

أي أن:
$$\ell_1 = \overline{\sin z} = \sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y$$

أما الطرف الثاني:

$$\ell_2 = \sin \bar{z} = \sin(x - iy)$$
$$= \sin x \cos iy - \cos x \sin iy$$

وبما أن $\left.\begin{matrix} \cos iy = \operatorname{ch} y \\ \sin iy = i \operatorname{sh} y \end{matrix}\right\}$ نعوض:

$$\ell_2 = \sin \bar{z} = \sin x \operatorname{ch} y - i \cos x \operatorname{sh} y = \ell_1$$

5 أوجد القسم الحقيقي والتخيلي للتابع $\operatorname{sh} z$

الحل:

$$i \operatorname{sh} z = \sin iz$$
$$\Longrightarrow \operatorname{sh} z = \frac{1}{i} \sin iz = \frac{1}{i} \sin(ix - y)$$
$$= \frac{1}{i}(\sin ix \cos y - \cos ix \sin y$$

ولكن: $\left.\begin{matrix} \sin ix = i \operatorname{sh} x \\ \cos ix = \operatorname{ch} x \end{matrix}\right\}$ نعوض:

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{i}(i \operatorname{sh} x \cos y - \operatorname{ch} x \sin y)$$
$$= \frac{1}{i}(i \operatorname{sh} x \cos y + i^2 \operatorname{ch} x \sin y)$$
$$\Longrightarrow \operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$$

وبهذا نجد:

$$\boxed{\begin{matrix} \operatorname{Re} \operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y \\ \operatorname{Im} \operatorname{sh} z = \operatorname{ch} x \sin y \end{matrix}}$$

/ /

6- أوجد قيمة الطويلة للتابع:

$w = \sin z$

عند النقطة: $z = \pi + i\ln(2+\sqrt{5})$

الحل:

وجدنا في التمرين $\boxed{4}$ أن:

$Re \sin z = \sin x \, ch y$

$Im \sin z = \cos x \, sh y$

أي أن:

$|w| = |\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \, ch^2 y + \cos^2 x \, sh^2 y}$

وبما أن: $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ نعوض:

$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x \, ch^2 y + (1 - \sin^2 x) sh^2 y}$

$= \sqrt{\sin^2 x \, ch^2 y + sh^2 y - \sin^2 x \, sh^2 y}$

$= \sqrt{\sin^2 x (ch^2 y - sh^2 y) + sh^2 y}$

ولكن: $\boxed{ch^2 y - sh^2 y = 1}$.

$\Rightarrow |\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + sh^2 y}$

بما أن: $z = \pi + i\ln(2+\sqrt{5}) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pi \\ y = \ln(2+\sqrt{5}) \end{array} \right.$

نعوض نجد:

$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 \pi + sh^2(\ln(2+\sqrt{5}))}$

إن: $\sin^2 \pi = 0$ ولدينا

$sh(\ln(2+\sqrt{5})) = \dfrac{e^{\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-\ln(2+\sqrt{5})}}{2}$

$= \frac{1}{2}(2+\sqrt{5}) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right)$

$= \dfrac{2+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2(2+\sqrt{5})}$

بتوحيد المقامات ثم الضرب بالمرافق نجد:

$sh(\ln(2+\sqrt{5})) = 2$

$\Rightarrow |\sin z| = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$

/ /

7 برهن أن الحل العام للمعادلة :

$$z = \cos w$$

والذي يرمز له بالرمز : $w = \arccos z$

يعطى بالشكل :

$$w = \frac{1}{i} \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

الحل :

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = \frac{1}{2} e^{iw} + \frac{1}{2} e^{-iw}$$

بفرض $t = e^{iw}$ اذا :

$$z = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2t}$$

$$\Leftrightarrow 2tz = t^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2tz + 1 = 0$$

$$\Delta = 4z^2 - 4 = 4(z^2-1)$$

$$\sqrt{\Delta} = \mp 2\sqrt{z^2-1}$$

$$t_1 = \frac{2z + 2\sqrt{z^2-1}}{2} = z + \sqrt{z^2-1}$$

$$t_2 = z - \sqrt{z^2-1}$$

$$t = e^{iw} = z \mp \sqrt{z^2-1}$$

نلاحظ أن جذري المعادلة مختلفان عن الصفر وجداؤهما يساوي الواحد

وبالتالي فإن جذور المعادلة : $t = e^{iw}$ موجودة بالنسبة للمجهول w

$$e^{iw} = z \mp \sqrt{z^2-1}$$

$$iw = \ln\left(z \mp \sqrt{z^2-1}\right)$$

وبما أن اللوغاريتم لا يأخذ القيم السالبة اذا :

$$iw = \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{i} \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) = \arccos z$$

/ /

8 برهن أن الحل العام للمعادلة:

$$z = \sin w$$

والذي يرمز له بالرمز:

$$w = \arcsin z$$

يعطى بالشكل:

$$w = \frac{1}{i} \ln[i(z+\sqrt{z^2-1})]$$

الحل:

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

$$z = \frac{1}{2i} e^{iw} - \frac{1}{2i} e^{-iw} \iff 2iz = e^{iw} - e^{-iw}$$

$$\Rightarrow e^{2iw} - 2iz e^{iw} - 1 = 0$$

نفرض $t = e^{iw}$ نجد:

$$t^2 - 2izt - 1 = 0$$

$$\Delta = 4i^2z^2 + 4 = 4i^2z^2 - 4i^2 = 4i^2(z^2-1)$$

$$\sqrt{\Delta} = \mp 2i\sqrt{z^2-1}$$

$$t_1 = \frac{2iz + 2i\sqrt{z^2-1}}{2} = i(z+\sqrt{z^2-1})$$

$$t_2 = i(z - \sqrt{z^2-1})$$

إن t_1, t_2 مختلفان عن الصفر وجداؤهما يساوي الواحد وبالتالي جذور المعادلة $t = e^{iw}$ موجودة بالنسبة للمجهول w.

$$e^{iw} = i(z \mp \sqrt{z^2-1})$$

$$iw = \ln(i(z \mp \sqrt{z^2-1}))$$

وبما أن اللوغاريتم لا يأخذ القيم السالبة إذاً:

$$w = \frac{1}{i} \ln(i(z+\sqrt{z^2-1})) = \arcsin z$$

ويمكن القول بأن:

$$w = \frac{1}{i} \ln(i) + \frac{1}{i} \ln(z+\sqrt{z^2-1})$$

$$\iff w = \frac{1}{i} \ln i + \arccos z = \arcsin z$$

/ /

9 أوجد القيمة الرئيسية للمقادير التالية:

$w_1 = i^{i}$, $w_2 = (2+i)^{1-i}$

الحل:

تذكرة: وجدنا أنه من أجل: $w = z^{a}$; $a = \alpha + i\beta$

يمكن القول أن:

$$w = e^{a[\ln|z| + i(\theta + 2\pi K)]}$$

ومن أجل $K = 0$ نحصل على القيمة الرئيسية:

$$w = e^{a[\ln|z| + i\theta]}$$

إذاً ومن أجل:

$$w_1 = i^{i} = z^{a}$$

حيث: $a = 0 + i$, $z = 0 + i$

نلاحظ أن: $|z| = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

إذاً القيمة الرئيسية لـ w_1:

$$w_1 = e^{i[\ln|1| + i\frac{\pi}{2}]}$$

$$\Rightarrow w_1 = e^{i[0 + i\frac{\pi}{2}]} = e^{i^2 \frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow w_1 = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$w_2 = (2+i)^{1-i} = z^{a}$$

$$z = 2 + i \quad , \quad a = 1 - i$$

$\Leftarrow$ $|z| = \sqrt{5}$ إذاً القيمة الرئيسية لـ w_2 هي:

$$w_2 = e^{(1-i)\{\ln\sqrt{5} + i\theta\}}$$

ولنعين قيمة θ من أجل تعيين القيمة الرئيسية:

أن: $r = |z| = \sqrt{5}$, $X = 2$, $y = 1$

$$\cos\theta = \frac{X}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{-i\theta} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{5}\, e^{i\theta} + \sqrt{5}\, e^{-i\theta} = 4$$

$$\sqrt{5}\, e^{2iQ} - 4e^{iQ} + \sqrt{5} = 0$$

$$\Delta = 16 - 20 = -4 = 4i^2$$

$$\sqrt{\Delta} = \mp 2i$$

$$e_1^{iQ} = \frac{4+2i}{2\sqrt{5}} = \frac{2+i}{\sqrt{5}} \quad , \quad e_1^{iQ} = \frac{2-i}{\sqrt{5}}$$

إذا نجد:

$$e^{iQ} = \frac{2 \mp i}{\sqrt{5}}$$

$$iQ = \ln\left(\frac{2\mp i}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow Q = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{2\mp i}{\sqrt{5}}\right)$$

ولدينا:

$$\sin Q = \frac{1}{2i}e^{iQ} - \frac{1}{2i}e^{-iQ}$$

بالتعويض نجد بأخذ القيمة الموجبة

$$\sin Q = \frac{2+i}{2i\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{2i(2+i)}$$

بتوحيد المقامات نجد:

$$\sin Q = \frac{(2+i)^2 - 5}{2i\sqrt{5}(2+i)} = \frac{4-1+4i-5}{4i\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \sin Q = \frac{4i-2}{\sqrt{5}(4i-2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

وبالعودة إلى:

$$z = 2+i \quad \begin{cases} r = \sqrt{5} \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\sin Q = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

إذا القيمة للزاوية Q والمقابلة للقيمة: $e^{iQ} = \frac{2+i}{\sqrt{5}}$ هي مقبولة

أي أن:

$$Q = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)$$

بالتعويض في القيمة الرئيسية لـ w_2 نجد:

$$w_2 = e^{(1-i)\left[\ln\sqrt{5} + i\left(\frac{1}{i}\ln\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\right]} = e^{(1-i)\left[\cancel{\ln\sqrt{5}} + \ln(2+i) - \cancel{\ln\sqrt{5}}\right]}$$

بالإصلاح نحصل على القيمة الرئيسية:

$$\boxed{w_2 = e^{(1-i)\ln(2+i)}}$$

10 بفرض أن : $z = 3 - 4i$

أوجد القيمة الرئيسية للمقادير التالية:

$w_1 = \ln z$ ، $w_2 = \sin z$ ، $w_3 = e^{iz}$

$w_4 = e^{-iz}$

الحل:

$\boxed{1}$ $w_1 = \ln z$

$$\ln z = \ln|z| + i(\theta + 2\pi K)$$

$z = 3 - 4i$ $\begin{cases} r = 5 = |z| \\ x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$

القيمة الرئيسية للمقدار w_1 هي:

$$w_1 = \ln|z| + i\theta = \ln 5 + i\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5}$$

حل المعادلة:

$$\cos\theta = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{2}e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{-i\theta} = \frac{3}{5}$$

$$5e^{i\theta} + 5e^{-i\theta} = 6$$

$$5e^{2i\theta} - 6e^{i\theta} + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 100 = -64 = 64i^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 8i$$

$$e^{i\theta} = \frac{6 \mp 8i}{10} \Longleftrightarrow \boxed{e^{i\theta} = \frac{3 \mp 4i}{5}}$$

$$iQ = \ln \frac{3 \mp 4i}{5} \Rightarrow Q = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{3 \mp 4i}{5}\right)$$

ولدينا :

$$\sin Q = \frac{1}{2i} e^{iQ} - \frac{1}{2i} e^{-iQ}$$

بالتعويض عن القيمة الموجبة :

$$\sin Q = \frac{3+4i}{10i} - \frac{5}{2i(3+4i)}$$

نوحد المقامات :

$$\sin Q = \frac{(3+4i)^2 - 25}{10i(3+4i)} = \frac{9+24i-16-25}{10i(3+4i)}$$

$$\sin Q = \frac{24i-32}{30i-40} = \frac{8(3i-4)}{10(3i-4)} = \frac{8}{10}$$

اذاً : $\sin Q = \frac{4}{5}$ الموافق للقيمة الموجبة وهذا

يناقض ✱ حيث : $\sin Q = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5}$

اذاً القيمة المقبولة للزاوية Q هي :

$$Q = \frac{1}{i} \ln\left(\frac{3-4i}{5}\right)$$

وبهذا تكون القيمة الرئيسية للمقدار w_1 هي :

$$w_1 = \ln 5 + i\left(\frac{1}{i} \ln\left(\frac{3-4i}{5}\right)\right)$$

$$= \ln 5 + \ln(3-4i) - \ln 5$$

$$\Rightarrow \boxed{w_1 = \ln(3-4i)}$$

$\boxed{2}$ $w_2 = \sin z$

ان $\sin z$ هو تابع وحيد التعيين أي أن له قيمة وحيدة :

$$w_2 = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$z = 3-4i$$

$$\Rightarrow w_2 = \frac{e^{i(3-4i)} - e^{-i(3-4i)}}{2i} = \frac{e^{4+3i} - e^{-4-3i}}{2i}$$

$$\Rightarrow \boxed{w_2 = \frac{i}{2}\left[e^{4+3i} - e^{-4-3i}\right]}$$

/ /

3 $w_3 = e^{iz}$

التابع الأسي تابع وحيد التعيين قيمة :

$w_3 = e^{iz} = e^{i(3-4i)}$; $z = 3-4i$

$\Longrightarrow \boxed{w_3 = e^{4-3i}}$

4 $w_4 = e^{-iz}$

تابع وحيد التعيين له قيمة واحدة هي :

$w_4 = e^{-i(3-4i)}$; $z = 3-4i$

$\Longrightarrow w_4 = e^{-3i+4i^2}$

$\Longrightarrow \boxed{w_4 = e^{-4-3i}}$

11 ماهي قيمة العدد العقدي z التي تجعل :

$\sin z = 10$

الحل :

$\sin z = 10$

$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 10 \Longrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 20i$

$e^{2iz} - 20i\,e^{iz} - 1 = 0$

$\Delta = -400 + 4 = -396 = 396i^2$

$\sqrt{\Delta} = \mp 6i\sqrt{11}$

$e_1^{iz} = \frac{20i + 6i\sqrt{11}}{2} = 10i + 3i\sqrt{11}$, $e_2^{iz} = 10i - 3i\sqrt{11}$

$e^{iz} = 10i \mp 3i\sqrt{11}$

$iz = \ln(10i \mp 3i\sqrt{11})$

$z = \frac{1}{i}\ln(10i \mp 3i\sqrt{11})$

/ /

12 برهن صحة العلاقة التالية:

$$tg\, iz = i\, th\, z$$

الحل:

$$\ell_1 = tg\, iz = \frac{1}{i}\left[\frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}\right]$$

$$= \frac{1}{i}\left[\frac{e^{-z} - e^{z}}{e^{-z} + e^{z}}\right] = \frac{1}{i}\left[\frac{i^2(e^{z} - e^{-z})}{e^{z} + e^{-z}}\right]$$

$$\Rightarrow \ell_1 = i\left[\frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}\right] = i\, th\, z = \ell_2$$

طريقة ثانية:

وجدنا أن

$$\sin iz = i\, sh\, z$$

$$\cos iz = ch\, z$$

$$\ell_1 = tg\, iz = \frac{\sin iz}{\cos iz} = \frac{i\, sh\, z}{ch\, z} = i\, th\, z = \ell_2$$

13 برهن صحة العلاقة التالية:

$$\cot iz = -i\, cth\, z$$

الحل:

$$\ell_1 = \cot iz = i\left[\frac{e^{i^2 z} + e^{-i^2 z}}{e^{i^2 z} - e^{-i^2 z}}\right] = i\left[\frac{e^{-z} + e^{z}}{e^{-z} - e^{z}}\right]$$

$$= \frac{i\,[e^{z} + e^{-z}]}{(-1)[e^{z} - e^{-z}]} = -i\left[\frac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}}\right]$$

$$= -i\, cth\, z = \ell_2$$

طريقة ثانية: وجدنا أن

$$\left.\begin{array}{l}\sin iz = i\, sh\, z\\ \cos iz = ch\, z\end{array}\right\}$$

$$\ell_1 = \cot iz = \frac{\cos iz}{\sin iz} = \frac{ch\, z}{i\, sh\, z} = \frac{i}{i^2}\left(\frac{ch\, z}{sh\, z}\right) = -i\, cth\, z = \ell_2$$

/ /

14 هل: $\ln i^3 \overset{?}{=} 3\ln i$

الحل:

بفرض $z = i^3 \Rightarrow z = -i$

$$\ell_1 = \ln i^3 = \ln(-i) = \ln|-i| + i(\theta + 2\pi k)$$

$$z = -i \Rightarrow |z| = |-i| = 1 = r$$

ولنوجد الزاوية θ

$$z = 0 - i \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{2}$$

$$\ell_1 = \ln i^3 = \ln(-i) = 0 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$\boxed{\ell_1 = -\frac{\pi i}{2} + 2\pi k i}$$

$$\ell_2 = 3\ln i$$

$$z = i \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z| = |i| = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\ell_2 = 3\ln i = 3\left[\ln|i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right]$$

$$= 3i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$\boxed{\ell_2 = \frac{3\pi i}{2} + 6\pi k i}$$

نلاحظ أن: $\ell_1 \neq \ell_2$

إذاً:

$$\ln i^3 \neq 3\ln i$$

15 هل: $\ln(-1)^3 \overset{?}{=} 3\ln(-1)$

الحل:

$$\ell_1 = \ln(-1)^3 \quad : \quad z = (-1)^3 = -1 = -1 + 0i$$

$$x = -1, \quad y = 0, \quad r = 1 = |z|$$

/ /

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \pi$$

$$\ell_1 = \ln z = \ln(-1)^3 = \ln|z| + i(\theta + 2\pi k)$$
$$= 0 \quad + i(\pi + 2\pi k)$$
$$= i\pi + 2\pi k i$$

$$\ell_2 = 3\ln(-1) = 3\left[\ln|-1| + i(\theta + 2\pi k)\right]$$
$$= 3\left[\ 0 + i(\pi + 2\pi k)\right]$$
$$= 3\pi i + 6\pi k i$$

نلاحظ أن:

$$\ell_1 \neq \ell_2$$

إذا: $\ln(-1)^3 \neq 3\ln(-1)$

$\boxed{16}$ هل: $\ln(1)^3 \stackrel{?}{=} 3\ln(1)$

الحل:

$$\ell_1 = \ln(1)^3$$
$$z = (1)^3 = 1 = 1 + i0$$
$$x = 1,\ y = 0,\ r = |z| = 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = 0$$

$$\ell_1 = \ln(1)^3 = \ln|z| + i(\theta + 2\pi k)$$
$$= 0 \quad + i(0 + 2\pi k)$$
$$= 2\pi k i$$

$$\ell_2 = 3\ln(1) = 3\left[\ln|1| + i(\theta + 2\pi k)\right]$$
$$= 3\left[0 + i(0 + 2\pi k)\right] = 6\pi k i = \ell_1$$

إذا: $\ln(1)^3 = 3\ln(1)$

/ /

المحاضرة السابعة   الأربعاء 7/11/2012

تتمة المسائل والتمارين:

17 أثبت صحة العلاقة التالية:

$$w = \arctan z = \tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

الحل:

$$w = \arctan z$$

$$\Longleftrightarrow \quad z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w}$$

$$\Longleftrightarrow \quad z = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} \times \frac{e^{iw}}{e^{iw}}$$

$$z = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}$$

$$iz = \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} \Longleftrightarrow iz(e^{2iw} + 1) = e^{2iw} - 1$$

بفرض $m = e^{2iw}$

$$iz(m+1) = m - 1$$

$$izm + iz - m = -1$$

$$izm - m = -1 - iz$$

$$m(iz - 1) = -1 - iz$$

$$m = \frac{-1-iz}{iz-1} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

إذاً بالتعويض نجد:

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

$$\Rightarrow 2iw = \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{w = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)}$$

/ /

18 برهن صحة مايلي:

$$w = \operatorname{arc\,sh} z = \ln(z + \sqrt{z^2+1})$$

الإثبات:

$$w = \operatorname{arc\,sh} z = sh^{-1} z$$

$$\Longleftrightarrow \quad z = sh\, w$$

$$z = \frac{e^{w} - e^{-w}}{2}$$

$$2z = e^{w} - e^{-w}$$

$$2z e^{w} = e^{2w} - 1 \qquad \times e^{w}$$

$$e^{2w} - 2z e^{w} - 1 = 0$$

$$\underbrace{e^{2w} - 2z e^{w} + z^2}_{} - z^2 - 1 = 0$$

$$(e^{w} - z)^2 = z^2 + 1$$

$$e^{w} - z = \sqrt{z^2+1}$$

$$e^{w} = z + \sqrt{z^2+1}$$

$$\boxed{w = \ln(z + \sqrt{z^2+1})}$$

19 برهن صحة مايلي:

$$w = \operatorname{arc\,ch} z = \ln(z + \sqrt{z^2-1})$$

الحل:

$$w = \operatorname{arc\,ch} z$$

$$z = ch\, w = \frac{e^{w} + e^{-w}}{2}$$

$$2z = e^{w} + e^{-w}$$

$$e^{2w} - 2z e^{w} + 1 = 0$$

$$e^{2w} - 2z e^{w} + z^2 - z^2 + 1 = 0$$

$$(e^{w} - z)^2 = z^2 - 1 \Longleftrightarrow e^{w} - z = \sqrt{z^2-1}$$

$$e^{w} = z + \sqrt{z^2-1} \Longleftrightarrow \boxed{w = \ln(z + \sqrt{z^2-1})}$$

20 أثبت صحة ما يلي:

$$w = \operatorname{arc\,th} z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

الحل:

$$w = \operatorname{arc\,th} z$$

$$z = \operatorname{th} w = \frac{e^{w} - e^{-w}}{e^{w} + e^{-w}} = \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1}$$

$$z e^{2w} + z = e^{2w} - 1$$

$$z e^{2w} - e^{2w} = -1 - z$$

$$e^{2w}(z-1) = -1 - z$$

$$e^{2w}(1-z) = 1 + z \Longleftrightarrow e^{2w} = \frac{1+z}{1-z}$$

$$2w = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{w = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

21 أوجد جميع قيم المقدار:

$$\arctan(1+i)$$

الحل:

نفرض: $z = 1+i$

وجدنا في المثال 17 أن:

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

بالتعويض:

$$\arctan(1+i) = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+i(1+i)}{1-i(1+i)}\right)$$

$$= \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+i-1}{1-i+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{i}{2-i}\right)$$

بإصلاح $\frac{i}{2-i}$ نجد:

$$\frac{i}{2-i} \cdot \frac{(2+i)}{(2+i)} = \frac{2i+i^2}{4-i^2} = \frac{2i-1}{4+1} = \frac{2i-1}{5}$$

$$\arctan(1+i) = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{2i-1}{5}\right)$$

/ /

إذا: $\ln z = \ln|z| + i(\theta + 2\pi k)$

$\arg z = \theta + 2\pi k$ «سعة العدد العقدي z»

$\boxed{\arctan(1+i) = \frac{1}{2i}\ln\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right| + \frac{1}{2}\arg z} \Leftarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \left|\frac{2}{5}i - \frac{1}{5}\right| = |z|$

شرط كوشي وريمان في الإحداثيات القطبية:

لتكن لدينا الدالة f المعرفة بالشكل التالي:

$$w = f(z) = u + iv$$

وبما أن:

$$u = u(x,y)$$
$$v = v(x,y)$$

حيث: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi,\quad 0 \le r < \infty$

إذاً: $x = x(r,\theta)$ ، $y = y(r,\theta)$

وبهذا يكون:

$$u = u[x(r,\theta), y(r,\theta)]$$
$$v = v[x(r,\theta), y(r,\theta)]$$

ولنحسب المشتقات الجزئية لكلا الدالتين:

A) $\frac{\partial u}{\partial r}$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

ولكن: $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$ ، $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$ نعوض فنجد:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial y}} \quad (1)$$

B) $\frac{\partial u}{\partial \theta}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

ولكن: $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$ ، $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$ نعوض فنجد:

$$\frac{\partial u}{\partial Q} = -r\sin Q \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + r\cos Q \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

نضرب ب $-\frac{1}{r}$:

$$\boxed{-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial Q} = \sin Q\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - \cos Q\,\frac{\partial u}{\partial y}} \quad (1)$$

C) $\frac{\partial v}{\partial r}$:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

ولكن : $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos Q$ ، $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin Q$

بالتعويض نحصل على :

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial r} = \cos Q\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \sin Q\cdot\frac{\partial v}{\partial y}} \quad (2)$$

D) $\frac{\partial v}{\partial Q}$:

$$\frac{\partial v}{\partial Q} = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial Q} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial Q}$$

ولكن : $\left.\begin{array}{l}\frac{\partial x}{\partial Q} = -r\sin Q\\ \frac{\partial y}{\partial Q} = r\cos Q\end{array}\right\}$ نعوض :

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial Q} = -r\sin Q\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + r\cos Q\cdot\frac{\partial v}{\partial y}} \quad (\tilde{2})$$

نضرب ب $+\frac{1}{r}$:

$$\boxed{+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial Q} = -\sin Q\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \cos Q\cdot\frac{\partial v}{\partial y}} \quad (\tilde{2})$$

بالعودة إلى (1) وبالاستفادة من شرطي كوشي وريمان

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos Q\cdot\frac{\partial v}{\partial y} - \sin Q\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = (\tilde{2})$$

إذاً :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial Q}} \star$$

وبالعودة إلى (1) وبالاستفادة من شرطي كوشي وريمان نجد :

$$-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial Q} = \sin Q\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \cos Q\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = (2)$$

إذاً: $\boxed{\dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial \theta}}$ ★★

إن كلاً من ★ و ★★ يمثلان شرطي كوشي وريمان في الأحداثيات القطبية.

ملاحظة: الفقرة السابقة سؤال امتحاني يأتي بالصيغة التالية، «استنتج شرطي كوشي وريمان في الأحداثيات القطبية»

المشتق في الأحداثيات القطبية:

لدينا من (1)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

نضرب الطرفين بـ «$\cos\theta$»

$$(3)\quad \cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \cos^2\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

ولدينا من (2):

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial v}{\partial x} + \sin\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$= \sin\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \cos\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

نضرب الطرفين بـ «$\sin\theta$»

$$(4)\quad \sin\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = \sin^2\theta \frac{\partial v}{\partial y} + \sin\theta\cos\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

نجمع (3) و (4) نحصل على:

$$\sin\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \sin^2\theta \frac{\partial v}{\partial y} + \cos^2\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

نستفيد من شرطي كوشي وريمان لتحويل جميع المشتقات الجزئية لتصبح بالنسبة لـ x

$$\sin\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \sin^2\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \cos^2\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\cos\theta\left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}\right)$$

$$\sin Q \frac{\partial v}{\partial r} + \cos Q \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = (\sin^2 Q + \cos^2 Q) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \cos Q \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \sin Q \cdot \frac{\partial v}{\partial r}} \quad 5$$

ولدينا: من 1

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos Q \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \sin Q \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

بضرب الطرفين بـ $\sin Q$

$$\boxed{\sin Q \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \sin Q \cos Q \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \sin^2 Q \cdot \frac{\partial u}{\partial y}}$$

ولدينا من 2

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \cos Q \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \sin Q \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

بضرب الطرفين بـ $\cos Q$:

$$\boxed{\cos Q \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = \cos^2 Q \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \sin Q \cdot \cos Q \cdot \frac{\partial v}{\partial y}}$$

$$= \sin Q \cdot \cos Q \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \cos^2 Q \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

بالطرح نجد:

$$\cos Q \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \sin Q \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \sin Q \cos Q \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \cos^2 Q \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \sin^2 Q \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

نستفيد من شرطي كوشي وريمان لتحويل جميع المشتقات الجزئية لتصبح بالنسبة لـ x:

$$\cos Q \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \sin Q \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \sin Q \cos Q \left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} \right) + \cos^2 Q \frac{\partial v}{\partial x} + \sin^2 Q \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\cos Q \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - \sin Q \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = (\cos^2 Q + \sin^2 Q) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin Q \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \cos Q \cdot \frac{\partial v}{\partial r}} \quad 6$$

ونعلم أنه اذا كان: $w = f(z) = u + iv$

فإن: $w' = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$

نعوض من 5 و 6

$$f'(z) = \cos Q \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \sin Q \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + i \left[-\sin Q \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \cos Q \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right]$$

$$f'(z) = \cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \sin\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial r} - i\sin\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + i\cos\theta \cdot \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\Rightarrow f'(z) = (\cos\theta - i\sin\theta) \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + (\sin\theta + i\cos\theta) \cdot \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$= (\cos\theta - i\sin\theta) \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + i\left(\frac{1}{i}\sin\theta + \cos\theta\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial r}$$

أخرجنا i عامل مشترك ثم نعوض $\frac{1}{i} = \frac{-i^2}{i} = -i$

$$\Rightarrow f'(z) = (\cos\theta - i\sin\theta) \frac{\partial u}{\partial r} + i(\cos\theta - i\sin\theta) \cdot \frac{\partial v}{\partial r}$$

نخرج $(\cos\theta - i\sin\theta)$ عامل مشترك:

$$f'(z) = (\cos\theta - i\sin\theta)\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

$$= e^{-i\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

$$= \frac{1}{e^{i\theta}}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

نضرب ونقسم على r:

$$f'(z) = \frac{r}{r \cdot e^{i\theta}} \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial r} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

ولكن $z = r \cdot e^{i\theta}$ بالتعويض نجد:

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

وبالاستفادة من شرطي كوشي وريمان في الأحداثيات القطبية:

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + i\left(-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(z) = \frac{1}{z}\left[\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]}$$

وتكون هذه هي علاقة المشتق في الإحداثيات القطبية

ملاحظة: الفقرة السابقة عبارة عن سؤال امتحاني يأتي بالصيغة التالية:

« استنتج علاقة المشتق في الإحداثيات القطبية »

تعريف التابع الخطي الكسري:

نسمي التابع f المعرف بالشكل:

$$f: C_\infty \longrightarrow C_\infty \;;$$

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

حيث:

- C_∞: المستوي العقدي الموسع.
- $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ ثوابت عقدية.
- d ، c لا ينعدمان معاً.

نسميه «التابع الخطي الكسري» أو ندعوه: «تحويل موبيوس»
وفي الحالة التي يكون فيها: $c=0$ ، $d \neq 0$ فإننا نحصل على التابع الخطي التالي:

$$w = f(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} = Az + B$$

وهو كثير حدود من الدرجة الأولى.

أما إذا كان: $c \neq 0$ فإننا نقبل بدون برهان أن كل تابع خطي كسري يمكن كتابته بالشكل:

$$w = -\frac{ad-bc}{c} \cdot \frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c}$$

ومن الشكل السابق نستنتج أن w يساوي مقداراً ثابتاً هو $\frac{a}{c}$ إذا كان: $ad-bc=0$.
والجدير بالذكر أن لكل تابع خطي كسري تابعاً معاكساً يعطى على الشكل:

/ /

2012/11/12 الإثنين	المحاضرة الثامنة

مسائل:

[1] أثبت أن التابع: $f(z) = z^m$
قابل المفاضلة في جميع أنحاء المستوي المركب حيث $m \geq 1$
مستخدماً الشكل القطبي ثم احسب مشتقه.

الحل:

نقول عن التابع: $f(z) = z^m$ أنه قابل للمفاضلة إذا حقق شرطي كوشي وريمان.
شرطا كوشي وريمان في الإحداثيات القطبية:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

ولنحدد الآن كلاً من u ، v.
لدينا: $f(z) = z^m = (r e^{i\theta})^m$

$$= r^m \cdot e^{im\theta}$$

$$= r^m \cdot [\cos m\theta + i \sin m\theta]$$

$$\Rightarrow f(z) = r^m \cos m\theta + i\, r^m \sin m\theta$$

$$u = r^m \cos m\theta \quad , \quad v = r^m \sin m\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = m r^{m-1} \cdot \cos m\theta \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial r} = m \cdot r^{m-1} \cdot \sin m\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -m\, r^m \sin m\theta \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = m \cdot r^m \cos m\theta$$

نأخذ $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}$ فنجد:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{\cancel{r}} \cdot (m \cdot r^{\cancel{m}} \cdot \cos m\theta) = m \cdot r^{m-1} \cdot \cos m\theta = \frac{\partial u}{\partial r}$$

ونأخذ $-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}$ فنجد:

$$-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} = \cancel{-}\frac{1}{\cancel{r}}(\cancel{-} m r^{\cancel{m}} \sin m\theta) = m \cdot r^{m-1} \sin m\theta = \frac{\partial v}{\partial r}$$

تحقق شرطا كوشي وريمان في الإحداثيات القطبية إذا التابع $f(z) = z^m$ قابل للمفاضلة.

حساب المشتق:

نعلم أن:

$$f'(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

بالتعويض نجد:

$$f'(z) = \frac{1}{z}(m.r^m\cos m\theta - i(-mr^m\sin m\theta))$$
$$= \frac{1}{z}(m.r^m\cos m\theta + i\, mr^m\sin m\theta)$$
$$= \frac{m.r^m}{z}(\cos m\theta + i\sin m\theta)$$

ولكن:

نعوض: $z^m = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)$

$$f'(z) = \frac{m}{z}\cdot z^{m} \Rightarrow \boxed{f'(z) = m.z^{m-1}}$$

2 لتكن لدينا: $D = \mathbb{C} \setminus [0, \infty]$ ولتكن:

$$0 < \theta < 2\pi$$

وليكن: $z = re^{i\theta}$

أثبت أن التابع: $f(z) = \sqrt{z}$ قابل للمفاضلة في كل نقطة من نقاط D مستخدماً الشكل القطبي ثم احسب مشتقه.

الحل:

$$f(z) = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = (re^{i\theta})^{\frac{1}{2}}$$
$$= r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}i\theta}$$
$$= r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{1}{2}\theta + i\sin\frac{1}{2}\theta\right]$$
$$f(z) = r^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}\theta + i\, r^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}\theta$$
$$u = r^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}\theta$$
$$v = r^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}\theta$$

/ /

شرط كوشي وريمان في الاحداثيات القطبية:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial Q} \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial Q} \end{cases}$$

ولنوجد المشتقات الجزئية:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} Q \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial Q} = -\frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} Q$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} Q \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial Q} = \frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} Q$$

نلاحظ أن:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial Q} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} Q\right) = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} Q = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial Q} = -\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} Q\right) = \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} Q = \frac{\partial v}{\partial r}$$

تحقق شرط كوشي وريمان إذاً التابع f تحليلي وقابل للمفاضلة.

إيجاد المشتق:

وجدنا أن:

$$f'(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial Q} - i \frac{\partial u}{\partial Q}\right)$$

$$= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} Q + i \cdot \frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} Q\right)$$

$$= \frac{1}{2z} \cdot r^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left[\cos \frac{1}{2} Q + i \sin \frac{1}{2} Q\right]}_{\text{حسب دوموافر يكون}}$$

$$= \frac{1}{2z} \cdot r^{\frac{1}{2}} \left[\cos Q + i \sin Q\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2z} \cdot \left(r(\cos Q + i \sin Q)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2z} \cdot e^{\frac{1}{2} i Q} = \frac{1}{2z} \cdot z^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(z) = \frac{\sqrt{z}}{2z} = \frac{1}{2\sqrt{z}}}$$

المتتاليات العقدية وتقاربها:

ليكن لدينا:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} \quad ;$$
$$n \longmapsto f(n) = z_n$$

حيث $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية أو أي مجموعة غير منتهية جزئية منها.
نسمي f متتالية عقدية نرمز لها بالرمز (z_n) أو $\{z_n\}$ وهي مجموعة غير منتهية من الأعداد العقدية:

$$z_1 , z_2 , z_3 , \ldots , z_n , \ldots$$

كل عدد من هذه المتتالية نسميه حداً لها ونسمي z_n الحد العام للمتتالية أو الحد النوني.

تعريف:

نقول عن المتتالية العقدية $\{z_n\}$ أنها متقاربة من العدد $a \in \mathbb{C}$ والذي ندعوه «نهاية المتتالية» إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad ; \quad n \geq n_0 \quad : |z_n - a| < \varepsilon$$

ونكتب عندئذ: $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$

وإذا لم تكن المتتالية متقاربة فإننا نقول أنها متباعدة.

وبشكل خاص نقول أن المتتالية $\{z_n\}$ متباعدة إلى اللانهاية إذا كان:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \infty$$

مثال (1):

لتكن المتتالية $\{z_n\}$ على الشكل:

$$z_n = z^n \quad \text{حيث} \quad |z| > 1$$

عندئذ: $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \infty$ والمتتالية متباعدة.

/ /

مثال (2):

لتكن المتتالية $\{z_n\}$ على الشكل:

$z_n = z^n$ حيث $|z| < 1$

ان: $\lim_{n \to \infty} z_n = 0$ والمتتالية متقاربة ونهايتها هي الصفر.

خواص المتتاليات العقدية:

سنتعامل مع المتتاليات العقدية كما تعاملنا مع المتتاليات الحقيقية.

① كل متتالية متقاربة تكون محدودة.

② إذا كانت المتتالية العقدية متقاربة فإن نهايتها وحيدة.

③ تتقارب المتتالية العقدية $\{z_n\}$ من العدد العقدي a إذا ا حوى كل جوار للعدد a جميع حدود المتتالية عدا عدد منتهي منها.

④ بفرض $\{a_n\}$ ، $\{b_n\}$ متتاليتان عقديتان بحيث:

$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad , \quad \lim_{n \to \infty} b_n = b$

عندئذ:

1- $\lim_{n \to \infty} (a_n \mp b_n) = a \mp b$

2- $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

3- $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_n \neq 0 \\ b \neq 0 \end{array} \right\}$

⑤ الشرط اللازم والكافي لتقارب متتالية عقدية $\{z_n\}$ هو أن تكون متتالية كوشي، أي يجب تحقق الشرط:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ ; n, m \geq n_0 : |z_m - z_n| < \varepsilon$

⑥ إذا كانت المتتالية العقدية $\{a_n\}$ متقاربة من الصفر وكانت $\{b_n\}$ متتالية محدودة عندئذ: $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$