# الفصل الأول:

# المجموعات المرتبة

## 1-1- العلاقة على مجموعة[1]:

### 1-1-1- تعريف:

لتكن $X$ مجموعة ما غير خالية، سندعو علاقة على $X$ أي مجموعة جزئية $R$ من الجداء الديكارتي $X^2$.
و في حال كان $(x,y) \in R$ فإننا سنرمز ذلك $x \; R \; y$ ونقول إن $x$ يرتبط به $y$. و نمثل ذلك برسم سهم من $x$ إلى $y$. وإذا كان من أجل كل $x \in X$ يوجد عنصر وحيد $y \in X$ يحقق $R \ni (x,y)$ فإننا سندعو العلاقة $R$ تابع، و سندعو $y$ صورة العنصر $x$ وفق التابع $R$، و سنرمز ذلك $y = R(x)$.

## 2-1- العلاقة العكسية لعلاقة:

لتكن $R$ علاقة ما على $X$، سندعو

$$R^{-1} \coloneqq \{(x,y) \in X^2 : (y,x) \in R\}$$

العلاقة العكسية للعلاقة $R$.

و إذا كانت العلاقة $R$ تابع تقابل فإن العلاقة $R^{-1}$ ستكون تابع أيضاً و هو التقابل العكسي للتابع $R$.

## 3-1- صفات علاقة على مجموعة:

لتكن $R$ علاقة ما على $X$، عندئذٍ قد تتصف العلاقة $R$ بأحد الصفات التالية:

**1 – الصفة الانعكاسية (Reflexive) :**

$$\forall \; x \in X : (x,x) \in R$$

**2 – الصفة التناظرية (Symmetric) :**

$$\forall x,y \in X : [\; (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R \;]$$

---

[1] بشكلٍ عام تعرف العلاقة بين مجموعتين $X, Y$ بأنها مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $X \times Y$، حيث تدعى المجموعة $X$ منطلق العلاقة، و المجموعة $Y$ مستقر العلاقة. لكن في دراسة نظرية الشبكات سندرس فقط العلاقات على مجموعة، و تحديداً علاقات الترتيب.

### 3 – الصفة التخالفية (Antisymmetric) :

$$\forall x, y \in X : [\,(x, y) \in R \;\wedge\; (y, x) \in R \;\Rightarrow x = y\,]$$

أو بعبارةٍ مكافئة

$$\forall x, y \in X : [\,(x, y) \in R \;\wedge\; x \neq y \;\Rightarrow (y, x) \notin R\,]$$

### 4 – الصفة المتعدية (Transitive) :

$$\forall x, y \in X : [\,(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R\,]$$

## 4-1- علاقات الترتيب:

**تعريف:**

نقول عن العلاقة $R$ المعرفة على المجموعة $X$، إنها علاقة ترتيب إذا كانت انعكاسية و متعدية وتخالفية.

ونرمز غالباً لعلاقة الترتيب بالرمز $\leq$ (وهي ليست بالضرورة الأصغر أو يساوي المألوف بين الأعداد)، وعندها سنقول إن المجموعة $X$ مرتبة وفق العلاقة $\leq$، وسندعو الثنائية $(X, \leq)$ **مجموعة مرتبة**.

إذا كانت $(X, \leq)$ مجموعة مرتبة فإن الترميزين التاليين متكافئين

$$(x, y) \in \leq \;, \qquad x \leq y$$

و سنقول في هذه الحالة إن

" $x$ أصغر من $y$ "          أو          " $y$ أكبر من $x$ "

وفي حال كان $x \leq y$ و $x \neq y$ فإننا سنرمز ذلك $x < y$، ونقول في هذه الحالة إن

" $x$ أصغر تماماً من $y$ "        أو        " $y$ أكبر تماماً من $x$ "

### 1-4-1- نتيجة:

$(X, R)$ مجموعة مرتبة $\Leftrightarrow$ $(X, R^{-1})$ مجموعة مرتبة.

**الإثبات:** سهل و يترك تمرين للقارئ.

### 1-4-2- ملاحظة:

سنرمز للعلاقة العكسية للعلاقة $\leq$ كما يلي

$$\leq^{-1} := \geq$$

إن $\geq$ علاقة ترتيب على $X$ أيضاً، و الكتابتين التاليتين متكافئتين

$$x \leq y \,, \qquad y \geq x$$

### 1-4-3- المجموعة المرتبة كلياَ:

نقول عن عنصرين $x, y$ من المجموعة المرتبة $(A, \leq)$ إنهما متقارنان إذا كان أحدهما يرتبط بالآخر، أي أن $(y \leq x) \vee (x \leq y)$. وفي خلاف ذلك فإننا سنقول إن العنصرين $x, y$ غير متقارنين و سنرمز ذلك $x||y$.

نقول عن المجموعة المرتبة $(A, \leq)$ إنها مرتبة كلياً (totally ordered set) أو سلسلة (chain) إذا كان كل عنصرين منها متقارنين، و نقول عنها إنها مرتبة جزئياً (partially ordered set := poset) إذا لم تكن مرتبة كلياً، أي إذا حوت عنصران غير متقارنان.

**مثال (1)**

لتكن $A$ مجموعة غير خالية تحوي عنصرين على الأقل، عندئذٍ فإن $(A, \{(x, x) \in A^2 : x \in A\})$ هي مجموعة مرتبة (مزودة بعلاقة المساواة)، و هذه العلاقة هي تابع و هو التابع المطابق $id_A$ ، و هي ليست سلسلة (أي ليست مرتبة كلياً).

**مثال (2)**

$(\mathbb{N}, \leq)$ مجموعة مرتبة كلياً، حيث $\mathbb{N}$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية، $\leq$ هي علاقة "أصغر أو يساوي" المألوفة بين الأعداد.

### 1-4-4- تمارين:

1- ما هو عدد علاقات الترتيب الممكن تعريفها على مجموعة مكونة من عنصرين ؟
2- ما هو عدد علاقات الترتيب الممكن تعريفها على مجموعة مكونة من ثلاث عناصر ؟
3- ما هو عدد علاقات الترتيب **الكلي** الممكن تعريفها على مجموعة مكونة من $n$ عنصر ؟

## 1-4-5- العنصر الأعظم والعنصر الأصغر في مجموعة مرتبة:

**1 -** سندعو العنصر $a \in A$ عنصر **أصغر** في المجموعة المرتبة $(A, \leq)$ إذا كان $a$ أصغر من أي عنصر آخر في $A$ . أي أن

$$\forall\, y \in A \;:\; a \leq y$$

وينتج عن ذلك أن أي عنصر مختلف عن $a$ لن يكون أصغر منه (لأن علاقة الترتيب تخالفية).

**2 -** سندعو العنصر $b \in A$ عنصر **أعظم** في المجموعة المرتب $(A, \leq)$ إذا كان $b$ أكبر من أي عنصر آخر في $A$ . أي أن

$$\forall\, y \in A \;:\; y \leq b$$

وينتج عن ذلك أن أي عنصر مختلف عن $b$ لن يكون أكبر منه (لأن علاقة الترتيب تخالفية).

## 1-4-6- العنصر الأعظمي والعنصر الأصغري في مجموعة مرتبة:

**1 -** سندعو العنصر $c \in A$ عنصر **أصغري** في المجموعة المرتبة $(A, \leq)$ إذا كان لا يوجد في $A$ أي عنصر أصغر تماماً من $c$ ( وهذا يكافئ قولنا: لا يوجد أي عنصر في $A$ مختلف عن $c$ وأصغر منه). أي أن

$$\forall\, y \in A : (\; y \leq c \;\;\Rightarrow\;\; c = y \;)$$

**2 -** سندعو العنصر $d \in A$ عنصر **أعظمي** في المجموعة المرتبة $(A, \leq)$ إذا كان لا يوجد في $A$ أي عنصر أكبر تماماً من $d$ ( وهذا يكافئ قولنا: لا يوجد أي عنصر في $A$ مختلف عن $d$ وأكبر منه).

مما يعني أن

$$\forall\, y \in A : (\; d \leq y \Rightarrow d = y \;)$$

## 1-4-7- ملاحظة هامة:

يكون العنصر $a$ أعظمي (على الترتيب أعظم، أصغري، أصغر) في المجموعة المرتبة $(A, \leq)$ إذا و فقط إذا كان العنصر $a$ أصغري (على الترتيب أصغر، أعظمي،أعظم) في المجموعة المرتبة $(A, \geq)$.

**مثال(3)**

لتكن العلاقة $R$ المعرفة على المجموعة $A=\{a,b,c\}$ كما يلي

$$R=\{(a,a),(b,b)\,,(c,c),(b,c)\,\}$$

عندئذٍ فإن $R$ علاقة ترتيب على $A$ (تحقق من ذلك)، وهي علاقة ترتيب جزئي لأن العنصرين (مثلاً) $a,b$ غير متقارنين. وهي لا تملك أي عنصر أعظم أو أصغر.

بالمقابل العناصر الأصغرية هي $a,b$ ، و العناصر الأعظمية هي $a,c$ .

**مثال(4)**

المجموعة المرتبة كلياً $(\mathbb{N},\leq)$ لا تملك عناصر أعظمية ولا تملك عنصر أعظم، لكنها تملك عنصر أصغري وحيد و أصغر وحيد هو $0$ .

**مثال(5)**

المجموعة المرتبة كلياً $(\mathbb{R},\leq)$ لا تملك عناصر أعظمية أو أصغرية .

**مثال(6)**

لنزود المجموعة $A=\{1,2,3,\dots,10\}$ بالعلاقة التالية

$$\forall\, x,y\in A\ :\qquad x\,R\,y\ \ \Leftrightarrow\ \ x\ \text{يقسم}\ y$$

عندئذٍ فإن العلاقة السابقة هي علاقة ترتيب (تحقق من ذلك)، وهي تملك عنصر أصغري

(و أصغر) وحيد هو $1$، ولا تملك عنصر أعظم، لكن كل من العناصر التالية هي عناصر أعظمية فيها

$$6\,,7\,,8\,,9\,,10$$

**1-4-8- نتائج:**

**1-** في مجموعة مرتبة ما، العنصر الأعظم (أو الاصغر) وحيد إن وُجِد.
ذلك لأنه إذا كان هناك عنصران أعظمان $a,a'$ في المجموعة المرتبة $(A,R)$ فإن $a\;R\;a'$ لأن $a'$ عنصر أعظم، كما أن $a'\;R\;a$ لأن $a$ عنصر أعظم، ومنه فإن $a=a'$ (لأن العلاقة $R$ تخالفية).

**2-** كل عنصر أعظم هو أعظمي لكن العكس غير صحيح بالضرورة.

لنفرض أن $a$ عنصر أعظم في المجموعة المرتبة $(A, \leq)$ ، ولنبرهن صحة الاقتضاء التالي

$$\forall x \in A : \ ( a \leq x \ \Rightarrow x = a )$$

لدينا $a \leq x$ ، وبما أن $a$ عنصر أعظم فإن $x \leq a$، و بما أن العلاقة $\leq$ تخالفية فإن $x = a$.

مما يعني أن العنصر $a$ أعظمي.

**3-** كل عنصر أصغر هو أصغري لكن العكس غير صحيح بالضرورة.

**4-** إذا كانت مجموعة ما مرتبة كلياً، فسيتطابق مفهومي العنصر الأعظمي والعنصر الأعظم، كما سيتطابق مفهومي العنصر الأصغري والعنصر الأصغر.

### 1-4-9- ملاحظة:

النتيجة الأخيرة (رقم 4) عكسها غير صحيح بالضرورة، فقد يكون في المجموعة المرتبة كل عنصر أصغري هو أصغر وكل عنصر أعظمي هو أعظم دون أن تكون المجموعة مرتبة كلياً و المثال التالي يبين ذلك.

**مثال (7)**

لتكن $P(\{1,2\}) = \{ \emptyset , \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \}$ مجموعة أجزاء المجموعة $\{1,2\}$، عندئذٍ فإن المجموعة المرتبة $(P(\{1,2\}), \subset)$ ، مزودةً بعلاقة الاحتواء[2] بين المجموعات، تملك عنصر أعظم و أعظمي وحيد هو $\{1,2\}$، و عنصر أصغر و أصغري وحيد هو المجموعة الخالية $\emptyset$. رغم أنها غير مرتبة كلياً لأن العنصرين[3] $\{1\}, \{2\}$ غير متقارنين.

### 1-4-10- المجموعة المحدودة في مجموعة مرتبة

**تعريف:**

لتكن $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة، ولتكن $\emptyset \neq B \subset A$ ، سنقول عن المجموعة $B$ إنها محدودة من الأعلى في $A$ إذا وُجِدَ $v \in A$ يحقق

$$\forall \ x \in B : \ \ x \leq v$$

ونقول عن المجموعة $B$ إنها محدودة من الأدنى في $A$ إذا وُجِدَ $u \in A$ يحقق

$$\forall \ x \in B : \ \ u \leq x$$

ونقول عن المجموعة $B$ إنها محدودة في $A$ إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى في $A$.

---

[2] سنرمز $\subset$ لعلاقة الاحتواء (محتواه أو تساوي)، بينما سنرمز للاحتواء التام $\subsetneq$.

[3] عناصر هذه المجموعة المرتبة هي مجموعات.

### 1-4-11- ملاحظة:

$a$ غير أصغري في المجموعة المرتبة $(A,\leq)$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, b \in A \ :\ b < a$

$a$ غير أعظمي في المجموعة المرتبة $(A,\leq)$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, b \in A \ :\ a < b$

### 1-4-12- مبرهنة:

كل مجموعة مرتبة ومنتهية تملك عنصر أصغري واحد على الأقل، و عنصر أعظمي واحد على الأقل.

**الإثبات:** يتم بالاعتماد على الملاحظة السابقة و يترك كتمرين للقارئ نظراً لسهولته.

## 1-5- أمثلة و تمارين:

**1-** لتكن $A$ مجموعة ما غير خالية تحوي أكثر من عنصرين، ولنزود مجموعة أجزائها $P(A)$ بعلاقة الاحتواء $\subset$، عندئذ فإن $(P(A),\subset)$ مجموعة مرتبة (تحقق من ذلك)، وهي ليست مرتبة كلياً (لماذا؟)، و المجموعة $A$ هي العنصر الأعظم والأعظمي الوحيد في $P(A)$، و المجموعة الخالية هي العنصر الأصغر و الأصغري الوحيد فيها .

**2-** إذا كانت $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة، $\emptyset \neq B \subset A$ ، فإنه يمكن تزويد المجموعة $B$ بالعلاقة $\leq_B$ التالية و التي سندعوها مقصور العلاقة $\leq$ على $B$

$$\forall\, x,y \in B : (x \leq_B y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \leq y\,)$$

والتي تجعل المجموعة $(B,\leq_B)$ مرتبة، و في حال عدم وجود التباس فإننا سنرمز للمجموعة المرتبة اختصاراً $(B,\leq)$ .

**3-** إذا كانت $\emptyset \neq B \subset \mathbb{N}$، فإن $(B,|)$ هي مجموعة مرتبة، حيث $|$ هي علاقة "يقسم" المألوفة بين الأعداد الطبيعية ، أي أن

$$\forall\, m,n \in B : m|n \Leftrightarrow\ n \in m\mathbb{N}$$

**4-** إذا كانت $\emptyset \neq B \subset P(A)$، فإن $(B,\subset)$ هي مجموعة مرتبة جزئياً.

**5-** إذا كانت $(A_1,\leq_1)$ ، $(A_2,\leq_2)$ مجموعتين مرتبتين، فإن المجموعة $A_1 \times A_2$ مزودةً بالعلاقة $\leq_1\times\leq_2$ التالية هي مجموعة مرتبة

$$\forall\, (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A_1 \times A_2 :$$
$$(x_1,y_1) \leq_1\times\leq_2 (x_2,y_2) \quad\Leftrightarrow\quad x_1 \leq_1 y_1 \ \wedge\ \ x_2\ \leq_2\ y_2$$

تدعى المجموعة المرتبة $(A_1 \times A_2, \leq_1 \times \leq_2)$ الجداء الديكارتي للمجموعتين المرتبتين $(A_1, \leq_1)$ ، $(A_2, \leq_2)$ .

**-6** لتكن $A$ مجموعة غير خالية، $(B, \leq_1)$ مجموعة مرتبة، ولتكن $F(A,B)$ مجموعة كل التوابع من $A$ إلى $B$، ولنزود المجموعة $F(A,B)$ بالعلاقة $\leq$ المعرفة كما يلي

$$\forall\, f, g \in F(A,B): \quad f \leq g \iff \left( \; f(x) \leq_1 g(x)\, ; \forall x \in A \; \right)$$

عندئذٍ فإن $(\, F(A,B), \leq)$ مجموعة مرتبة.

**حالة خاصة (1):**

بأخذ $A = B = \mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية مزودةً بترتيب الأعداد المألوف $\leq$،

فنجد أنه من أجل أي تابعين $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ يكون $f \leq g$ إذا وفقط إذا كان المنحني البياني للتابع $f$ يقع فوق المنحني البياني للتابع $g$ في المستوي الديكارتي.

**حالة خاصة (2):**

بأخذ $A = \mathbb{N}$، $B = \mathbb{R}$ ، ولنفرض أن كلاهما مزود بترتيب الأعداد المألوف $\leq$ ، فنجد أن $F(A,B)$ هي مجموعة كل المتتاليات الحقيقية، وبذلك نكون قد عرفنا علاقة ترتيب على المتتاليات كما يلي

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff (\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n)$$

**-7 علاقة الترتيب الأبجدي *(Lexicographic)***

لتكن $(A, \leq_1), (B, \leq_2)$ مجموعتين مرتبتين، ولنزود المجموعة $A \times B$ بالعلاقة التالية:

$$\forall\, (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B :$$

$$(a_1, b_1) \leq_L (a_2, b_2) \iff \begin{cases} a_1 <_1 a_2 \\ \text{أو} \\ a_1 = a_2 \;\wedge\; b_1 \leq_2 b_2 \end{cases}$$

تحقق أن $(A \times B, \leq)$ هي علاقة ترتيب. يدعى هذا الترتيب ترتيب أحرف الهجاء !!.

**-8** لتكن $(A, \leq_1), (B, \leq_2)$ مجموعتين منفصلتين و مرتبتين، ولنزود المجموعة $A \cup B$ بالعلاقة

$$\forall\, a, b \in A \cup B \;:\; a \leq b \iff \begin{cases} a, b \in A \;\wedge\; a \leq_1 b \\ \text{أو} \\ a, b \in B \;\wedge\; a \leq_2 b \end{cases}$$

أثبت أن $(A \cup B, \leq)$ مجموعة مرتبة، سندعوها الاجتماع المنفصل للمجموعتين المرتبتين المنفصلتين $(A, \leq_1), (B, \leq_2)$، و سنرمز لها $(A \uplus B, \leq)$.

**-9** لتكن $(A, \leq_1), (B, \leq_2)$ مجموعتين مرتبتين، ولنزود المجموعة $A \cup B$ بالعلاقة

$$\forall\, a,b \in A \cup B \;:\; a \le b \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a,b \in A \;\wedge\; a \le_1 b \\ \text{أو} \\ a,b \in B \;\wedge\; a \le_2 b \\ \text{أو} \\ a \in A \;\;\wedge\;\; b \in B \end{cases}$$

أثبت أن $(A \cup B, \le)$ مجموعة مرتبة، سندعوها المجموع المباشر للمجموعتين المرتبتين $(A, \le_1), (B, \le_2)$، و سنرمز لها $(A \oplus B, \le)$.

## 1-6- علاقة الترتيب الأبجدي (Lexicographic) و قواميس اللغة العربية:

لتكن $A$ مجموعة كل أحرف اللغة العربية مرتبةً حسب الترتيب المألوف لهذه الأحرف، أي

$$\text{أ} < \text{ب} < \text{ت} < \cdots < \text{و} < \text{ي}$$

عندئذٍ فإن $(A, \le)$ مجموعة مرتبة كلياً.

لنطابق بين كل كلمة و المرتَّبة التي تقابلها، فمثلاً الكلمة "رياضيات" سنطابق بينها و بين المرتّبة

$$(\text{ر}, \text{ي}, \text{ا}, \text{ض}, \text{ي}, \text{ا}, \text{ت}) \in A^7$$

ليكن $n$ عدد أحرف أطول كلمة باللغة العربية، و بالاعتماد على التطابق السابق فإن

$$A^i = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{i \text{ مرة}}$$

هي مجموعة كل كلمات اللغة العربية المكونة من $i$ حرف، وبالاعتماد على غمس[4] المجموعات التالي

$$A \subset A^2 \subset \cdots \subset A^n$$

فإن المجموعة $A^n$ تحوي كل كلمات اللغة العربية، و لنزود المجموعة $A^n$ بعلاقة الترتيب $\le_L$ الواردة في المثال رقم 7 $(Lexicographic)$، فمثلاً لمقارنة كلمتين مختلفتين فإننا ننظر إلى الحرف الأول فإذا كان لهما نفس الحرف الاول، ننظر إلى الحرف الثاني فإذا كان لهما نفس الحرف الثاني ننظر إلى الحرف الثالث و هكذا...إلى أن نصل إلى أول حرفين مختلفين (وهو موجود حتماً طالما الكلمتين مختلفتين) فعندها يكون ترتيب هاتين الكلمتين حسب ترتيب هذين الحرفين المختلفين، فمثلاً لنأخذ الكلمتين: "جبر" و

[4] نعرف غمس المجموعات رياضياً كما يلي: إذا وجد تطبيق متباين $f: A \to B$ فإنه بإمكاننا أن نطابق بين المجموعتين $A, f(A)$ لوجود تقابل بينهما، و بالتالي فإنه بإمكاننا النظر للمجموعة $A$ كمجموعة جزئية من $B$، تدعى هذه العملية عملية غمس المجموعة $A$ في المجموعة $B$.
و بالاعتماد على غمس المجموعات فإننا نعتبر مثلاً $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$.

"جبل" ، فنجد أنه تطابق فيهما الحرفين الأول و الثاني بينما الحرف الثالث في كل منهما مرتبين كما يلي في المجموعة المرتبة $(A, \leq)$

ل < ر

فالكلمتين مرتبتين كما يلي :

جبل < جبر

إذاً مجموعة كل كلمات اللغة العربية تصبح مرتبة كلياً وفق علاقة الترتيب هذه، وهي نفس طريقة ترتيب قواميس اللغة العربية التي تأخذ بأوائل الكلمات، بالمقابل فإن القواميس التي تأخذ بأواخر الكلمات تعتمد علاقة الترتيب $\leq_L^{-1}$، انطلاقاً من المجموعة المرتبة $(A, \geq)$.

## 1-7- تمثيل علاقة ترتيب على مجموعة:

لتكن $R$ علاقة ترتيب[5] ما على المجموعة $A$ ، عندئذٍ يمكن تمثيل هذه العلاقة بأحد الطرق التالية:

### 1- ديكارتياً :

حيث نمثل منطلق العلاقة $A$ بمحور أفقي $\overrightarrow{ox}$، ومستقر العلاقةَ $A$ بمحور شاقولي $\overrightarrow{oy}$، ومن ثم إذا كان $(x, y) \in R$ ، فإننا سنرسم النقطة $(x, y)$ في المستوي الديكارتي، وبالتالي فإن المنحني البياني الناتج عن رسم جميع النقاط $R \ni (x, y)$ هو بيان هذه العلاقة.

### 2- باستخدام مخططات فن (Venn):

فيمكننا تمثيل العلاقة $R \subset A^2$ باستخدام مخططات فن (Venn)، بأن نرسم المجموعة $A$ و من ثم نرسم سهماً موجهاً من العنصر $x \in A$ إلى العنصر $y \in A$ في حال كان $(x, y) \in R$ .

### 3- مصفوفياً:

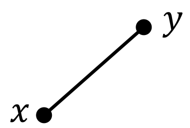
إذا كانت $(A, R)$ مجموعة مرتبة حيث $A = \{1, 2, \dots, n\}$، فيمكن تمثيل هذه العلاقة بمصفوفة $B = \left(b_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ مؤلفة من $n$ سطر و $n$ عمود، حيث

$$b_{i,j} := \begin{cases} 1 & if \ (i, j) \in R \\ 0 & if \ (i, j) \notin R \end{cases}$$

[5] إن الطرق الثلاث الأولى لتمثيل علاقة ترتيب على مجموعة ما، تصلح من أجل أي علاقة (حتى لو لم تكن علاقة ترتيب)، بينما الطريقة الرابعة باستخدام مخططات هاس فهي لا تصلح إلا للمجموعات المرتبة.

### 4- باستخدام مخططات هاس (Hasse diagrams):

في المجموعة المرتبة $(A,\leq)$، من أجل أي عنصرين $x,y \in A$ سنقول إن $y$ يلي مباشرةً $x$ إذا كان $x<y$ و كان لا يوجد أي $z \in A$ يحقق $x<z<y$. وإذا كان $y$ يلي مباشرةً $x$ فإننا سنرمز ذلك $x \prec y$ ، وسنمثل ذلك بالرسم كما يلي :




**تمرين:**

لنزود المجموعة $A=\{1,2\}$ بعلاقة الترتيب التالية

$$R=\{(1,1),(2,2),(1,2)\}$$

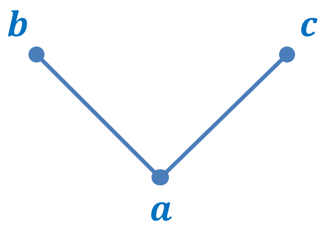
مثّل هذه العلاقة باستخدام طرق التمثيل الأربعة السابقة.

**مثال (1):**

لتكن المجموعة المرتبة $(,R)$، حيث $A=\{a,b,c\}$ حيث

$$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(a,b)\}$$

فيكون مخطط هاس لها كما في الشكل المجاور.



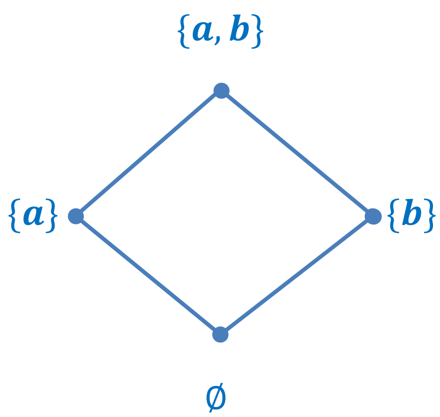

و المصفوفة الممثلة لهذه العلاقة هي

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**مثال (2):**

لنأخذ المجموعة المرتبة $(P(\{a,b\}),\subseteq)$،

فنجد أن مخطط هاس لها كما في الشكل المجاور.



## 1-8- تمارين:

### تمرين(1):

أوجد مخطط هاس للمجموعة المرتبة $(\{1,2,3,4,6,12\},|)$ حيث | هي علاقة القسمة، أي أن

$$\forall\, x\,, y \in \{1,2,3,4,6,12\} \quad : \qquad x \mid y \Leftrightarrow y \in x.\mathbb{N}$$

أعد التمرين السابق من أجل المجموعة المرتبة $(\{2,3,4,6\},|)$.

### تمرين (2):

لتكن المجموعتين المرتبتين $(A_1, \leq_1), (A_2, \leq_2)$ حيث

$$A_1 = \{a, b, c\}, \qquad a \leq_1 b \leq_1 c$$

$$\mathrm{A}_2 = \{x, y, z\}, \qquad x \leq_2 z\,, \qquad y \leq_2 z$$

و المطلوب ارسم مخطط هاس لكل من هاتين العلاقتين، ثم ارسم مخطط هاس للمجموعة المرتبة $(A_1 \times A_2\,, \leq)$ حيث من أجل كل $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in A_1 \times A_2$ فإن

$$(u_1, u_2) \leq (v_1, v_2) \;\Leftrightarrow (\, u_1 \leq_1 v_1 \quad \wedge \quad u_2 \leq_2 v_2\,)$$

### تمرين (3):

1- ارسم كل مخططات هاس الممكنة لمجموعة مكونة من عنصرين.
2- استنتج عدد علاقات الترتيب الممكنة على مجموعة مكونة من عنصرين؟
3- ارسم كل مخططات هاس الممكنة لمجموعة مكونة من ثلاث عناصر.
4- استنتج عدد علاقات الترتيب الممكنة على مجموعة مكونة من ثلاث عناصر؟

### تمرين (4):

باستخدام مخططات هاس، بيِّن ما هو عدد علاقات الترتيب الكلي الممكن تعريفها على مجموعة مكونة من $n$ عنصر؟

### تمرين (5):

ارسم مخطط هاس للمجموعة المرتبة $(P(\{a, b, c\}), \subseteq)$.

**تمرين (6):**

ليكن $p, q$ عددين أوليين مختلفين، و لتكن $A$ مجموعة العوامل الصحيحة الموجبة للعدد $p^2q^3$ ، أي أن

$$A = \{m \in \mathbb{N}^* : m |\, p^2 q^3 \} = \{p^i q^j : \ 0 \le i \le 2 , 0 \le j \le 3\}$$

نعلم أن $(A, |)$ مجموعة مرتبة، أوجد مخطط هاس لها.

**تمرين (7):**

ارسم كل مخططات هاس الممكنة على مجموعة مكونة من 4 عناصر.