جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

تحليل(5)

نخبة من أروع التمارين عن الدوال ذات التغيرات المحدودة

الدفعة الأولى

مدرس المقرر: د . نايف طلي

إعداد الطالب:وسام عرابي

تمرين(1): أثبت أن كل دالة ذات تغير محدود يمكن كتابتها كفرق دالتين متناقصتين.

الإثبات: لنفرض أن $f(x)$ دالة معرفة على الفترة $[a,b]$ وهي دالة ذات تغير محدود ومن هذا ينتج مباشرةً أن دالة التغير الكلي $g(x)$ هي دالة متزايدة على الفترة $[a,b]$ **(حسب مبرهنة سابقة والقائلة إذا كانت $f(x)$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ فإن $g(x)$ دالة التغير الكلي هي دالة متزايدة على المجال $[a,b]$).**

وبناءً على ملاحظة سابقة تكون الدالة $\varphi(x) = -g(x)$ هي دالة متناقصة على المجال $[a,b]$

لنفرض أن الدالة $f(x)$ تكتب بالشكل:

$$f(x) = \varphi(x) - h(x) \Rightarrow h(x) = \varphi(x) - f(x) \qquad ; \quad \forall x \in [a,b]$$

وكي يتم المطلوب يكفي أن نبرهن أن الدالة $h(x)$ هي دالة متناقصة على الفترة $[a,b]$ وبرهان ذلك يتم عن طريق التعريف أي:

من أجل أي عنصرين $x_1, x_2 \in [a,b]$ وبحيث $x_1 < x_2$ لنبرهن أنه يتحقق

$$h(x_1) \geq h(x_2)$$

لدينا:

$$h(x_1) - h(x_2) = [\varphi(x_1) - f(x_1)] - [\varphi(x_2) - f(x_2)]$$
$$= [\varphi(x_1) - \varphi(x_2)] - [f(x_1) - f(x_2)] \qquad \ldots *$$

ولكن$f(x)$ حسب الفرض د.ت.م على الفترة $[a,b]$ أي:

$$\overset{x_2}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f) \Rightarrow \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f) = \overset{x_2}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f)$$

$$f(x_1) - f(x_2) \leq |f(x_1) - f(x_2)| \leq \text{كون } f \text{ د.ت.م} \leq \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)$$
$$= \overset{x_2}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f)$$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \leq \overset{x_2}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f) = g(x_2) - g(x_1) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2)$$

وبالتالي نستنتج أن:

$$f(x_1)-f(x_2)\le \varphi(x_1)-\varphi(x_2)$$

وبالعودة إلى $*$ نجد أن:

$$[\varphi(x_1)-\varphi(x_2)]-[f(x_1)-f(x_2)]\ge 0$$

وبالتالي:

$$h(x_1)-h(x_2)\ge 0 \Rightarrow h(x_1)\ge h(x_2) \Rightarrow \quad \text{دالة متناقصة } h(x)$$

وبالتالي $f(x)$ كتبت كفرق دالتين متناقصتين وهو المطلوب.

تمرين(2): بين أن التغير الكلي للدالة

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & ; \quad x<1 \\ 10 & ; \quad x=1 \\ x^2 & ; \quad x>1 \end{cases}$$

هو 23 على الفترة $[0,2]$.

الحل:

حسب الخاصة الخامسة من خواص الدوال ذات التغير المحدود يكون:

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}(f)=\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)+\overset{2}{\underset{1}{V}}(f)$$

لنأخذ تجزئة عشوائية للمجال $[0,1]$ ولتكن:

$$P_1[x_0=0,x_1,x_2,\dots x_n=1 \quad ; \quad x_0=0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1]$$

ولنشكل المجموع المقابل للتجزئة العشوائية السابقة:

$$V(P_1,f)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$
$$=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+|f(x_3)-f(x_2)|$$
$$+\cdots+|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|+|f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$=|(x_1-1)-(-1)|+|(x_2-1)-(x_1-1)|+|(x_3-1)-(x_2-1)|$$
$$+\cdots+|(x_{n-1}-1)-(x_{n-2}-1)|+|10-(x_{n-1}-1)|$$

$$\text{بحسب التجزئة}=x_1+x_2-x_1+x_3-x_2+\cdots x_{n-1}-x_{n-2}+11-x_{n-1}=11$$

وبالتالي:

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = Sup\{V(P_1, f)\} = Sup\{11\} = 11$$

لنأخذ تجزئة عشوائية للمجال [1,2] ولتكن:

$$P_2[z_0 = 1, z_1, z_2, \dots z_n = 2 \;\; ; \;\; z_0 = 1 < z_1 < z_2 < \cdots < z_n = 2]$$

ولنشكل المجموع المقابل للتجزئة العشوائية السابقة:

$$V(P_2, f) = \sum_{k=1}^{n} |f(z_k) - f(z_{k-1})|$$

$$= |f(z_1) - f(z_0)| + |f(z_2) - f(z_1)| + |f(z_3) - f(z_2)| + \cdots + |f(z_{n-1}) - f(z_{n-2})| + |f(z_n) - f(z_{n-1})|$$

$$= |z_1^2 - 10| + |z_2^2 - z_1^2| + |z_3^2 - z_2^2| + \cdots + |z_{n-1}^2 - z_{n-2}^2| + |4 - z_{n-1}^2|$$

بحسب التجزئة $= 10 - z_1^2 + z_2^2 - z_1^2 + z_3^2 - z_2^2 + \cdots + z_{n-1}^2 - z_{n-2}^2 + 4 - z_{n-1}^2$

$$= 14 - 2z_1^2$$

وبالتالي:

$$\overset{2}{\underset{1}{V}}(f) = Sup\{V(P_2, f)\} = Sup\{14 - 2z_1^2\} = 12$$

وبالتالي نستنتج أن:

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}(f) = \overset{1}{\underset{0}{V}}(f) + \overset{2}{\underset{1}{V}}(f) = 11 + 12 = 23$$

تمرين(3): بين أن المنحني الفراغي المعين وسيطياً بالمعادلات:

$$x = a.\cos t \,, y = a.\sin t \,, z = bt$$

هو منحني قابل للتجمبع ثم احسب طوله.

حيث $\quad 0 \le t \le 2\pi$

الحل: بحسب مبرهنة جوردان حتى يكون المنحني المعطى بالمعادلات الوسيطية السابق منحني مجمع على الفترة $0 \le t \le 2\pi$ يلزم ويكفي أن يكون كل من الدوال:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

هي دوال ذات تغير محدود على الفترة $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$x' = -a.\,sint \Rightarrow |x'| = |-a.\,sint| \leq |\mathrm{a}| \quad ;\forall\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

والمشتق محدود وبالتالي $x = x(t)$ بحسب مبرهنة هي د.ت.م على الفترة $0 \leq t \leq 2\pi$

$$y' = a.\,cost \Rightarrow |y'| = |a.\,cost| \leq |\mathrm{a}| \quad ;\forall\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

والمشتق محدود وبالتالي $y = y(t)$ هي د.ت.م على الفترة $0 \leq t \leq 2\pi$

$$z' = b \Rightarrow |z'| = |b| \quad ;\forall\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

والمشتق محدود وبالتالي $z = z(t)$ هي د.ت.م على الفترة $0 \leq t \leq 2\pi$

وبالتالي المنحني المعطى بالمعادلات الوسيطية بالفرض هو منحني مجمع.

- إن طول المنحني يعطى بالعلاقة:

$$l = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{(-a.\,sint)^2 + (a.\,cost)^2 + (b)^2}\,dt$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\,dt = 2\pi.\sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow l = 2\pi.\sqrt{a^2 + b^2}$$

تمرين(4): بين أن الدالة f المعرفة على المجال $[0,1]$ والتي قاعدة ربطها هي:

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{1 + x}$$

هي دالة ذات تغير محدود على المجال المعطى ثم أوجد التغير الكلي لهذه الدالة.

الحل: إن الدالة $f(x)$ المعرفة على المجال $[0,1]$ تكتب بالشكل:

$$f(x) = x^2 + \left(-\frac{1}{1 + x}\right) = g(x) + h(x)$$

أما الدالة $g(x) = x^2$ هي دالة متزايدة تماماً على المجال $[0,1]$ **والدالة** $\boldsymbol{h(x) = -\frac{1}{1+x}}$ هي أيضاً دالة متزايدة تماما على المجال $[0,1]$ لأنه حسب تعريف الدالة المتزايدة نقول عن الدالة $h(z)$ انها متزايدة تماماً على المجال $[0,1]$ إذا تحقق:

$$\forall x_1, x_2 \in [0,1]\,; x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

لنتحقق من ذلك لدينا:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 1 + x_1 < 1 + x_2 \Rightarrow \frac{1}{1+x_1} > \frac{1}{1+x_2} \Rightarrow \frac{-1}{1+x_1} < \frac{-1}{1+x_2}$$

$\Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$ متزايدة تماماً

وكون أن $f(x) = g(x) + h(x)$ وكل من h و g دالتين متزايدتين فحسب ملاحظة سابقة مجموع دالتين متزايدتين هي دالة متزايدة عندها تكون الدالة f دالة متزايدة على المجال $[0,1]$ وحسب المعيار للدوال ذات التغيرات المحدودة والمرتبط بالدوال المطردة تكون الدالة f هي دالة ذات تغير محدود على الفترة $[0,1]$ والأكثر من ذلك يعطى تغيرها الكلي بالعلاقة:

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f) = f(1) - f(0) = \left[x^2 - \frac{1}{1+x}\right]_{x=1} - \left[x^2 - \frac{1}{1+x}\right]_{x=0}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + 1 = {}^{3}\!/_{2}$$

تمرين (5): بين أن الدالة $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ هي د.ت.م على الفترة الغير محدودة $[2, +\infty[$ وأوجد تغيرها الكلي.

الحل: حسب التعريف تكون الدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة الغير محدودة $[2, +\infty[$ د.ت.م على هذه الفترة إذا كانت د.ت.م على أي فترة جزئية $[0, A]$ وبحيث أن التغيرات الكلية لمختلف قيم A تكون محدودة ونكتب:

$$\overset{+\infty}{\underset{2}{V}}(f) = Sup_{A>2}\left\{\overset{A}{\underset{2}{V}}(f)\right\}$$

لنثبت أن الدالة f هي د.ت.م على المجال $[0, A]$.

نلاحظ أن:

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^3} < 0$$

والدالة متناقصة تماماً حسب مبرهنة سابقة.

وكونها دالة متناقصة فحسب المعيار الأول من معايير الدوال ذات التغير المحدود تكون f د.ت.م على المجال$[2, A]$ والأكثر من ذلك يعطى التغير الكلي بالعلاقة:

$$\overset{A}{\underset{2}{V}}(f) = f(2) - f(A) = \left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]_{x=2} - \left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]_{x=A} = \frac{1}{9} - \frac{1}{(A+1)^2}$$

وبالتالي:

$$\overset{+\infty}{\underset{2}{V}}(f) = Sup_{A>2}\left\{\overset{A}{\underset{2}{V}}(f)\right\} = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{(A+1)^2}\right) = \frac{1}{9}$$

والدالة f هي دالة ذات تغير محدود على المجال $[2, +\infty[$.

تمرين(6): بين أنه على الفترة $(0, \infty)$ الدالة $f(x) = \ln(x)$ تكون متزايدة بينما الدالة $g(x) = 1 - e^{2x}$ تكون متناقصة.

الحل:

طريقة أولى: بالنسبة للدالة $f(x) = \ln(x)$ لنبرهن على أنها دالة متزايدة على المجال $(0, \infty)$ وبالتالي حسب تعريف الدالة المتزايدة من أجل أي عنصرين $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ وبحيث

$x_1 < x_2$ لنبرهن أنه يتحقق $f(x_1) \le f(x_2)$ لكي تكون الدالة متزايدة أو يتحقق $f(x_1) < f(x_2)$ لكي تكون الدالة متزايدة تماماً.

لدينا:

$$\forall\, x_1, x_2 \in (0, \infty) \;\; ; x_1 < x_2$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \text{لوغارتم الطرفين} \Rightarrow \ln(x_1) < \ln(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

والدالة $f(x)$ هي دالة متزايدة تماماً على الفترة $(0, \infty)$ وذلك حسب تعريف الدالة المتزايدة.

طريقة ثانية: نعلم حسب مبرهنة سابقة أنه إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة ومستمرة على $[a, b]$ وكانت قابلة للإشتقاق على المجال $]a, b[$ فإن الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة $f(x)$ متزايدة تماماً على الفترة $[a, b]$ هو أن يتحقق الشرط التالي:

$$f'(x) > 0$$

وبالتالي وكون أن قاعدة ربط الدالة $f(x) = \ln(x)$ وهي دالة قابلة للاشتقاق على المجال $(0, \infty)$ ومشتقها يعطى بالعلاقة:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x} > 0$$

وبالتالي $f(x)$ هي دالة متزايدة تماماً على المجال $(0, \infty)$.

بالنسبة للدالة $g(x) = 1 - e^{2x}$ لنبرهن على أنها دالة متناقصة على المجال $(0, \infty)$ وبالتالي حسب تعريف المتناقصة من أجل أي عنصرين $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ وبحيث

$x_1 < x_2$ لنبرهن أنه يتحقق $g(x_1) \ge g(x_2)$ لكي تكون الدالة متناقصة أو يتحقق $g(x_1) > g(x_2)$ لكي تكون الدالة متناقصة تماما.

لدينا:

$$\forall\, x_1, x_2 \in (0, \infty)\ \ ; x_1 < x_2$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow \mathrm{e}^{2x_1} < e^{2x_2} \Rightarrow -\mathrm{e}^{2x_1} > -e^{2x_2} \Rightarrow$$

$$1 - \mathrm{e}^{2x_1} > 1 - e^{2x_2} \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

والدالة $f(x)$ هي دالة متناقصة تماماً على الفترة $(0, \infty)$ وذلك حسب تعريف الدالة المتزايدة.

طريقة ثانية: نعلم حسب مبرهنة سابقة أنه إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة ومستمرة على $[a, b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على المجال $]a, b[$ فإن الشرط اللازم والكافي كي تكون الدالة $f(x)$ متناقصة تماماً على الفترة $[a, b]$ هو أن يتحقق الشرط التالي:

$$g'(x) < 0$$

وبالتالي وكون أن قاعدة ربط الدالة $g(x) = 1 - \mathrm{e}^{2x}$ وهي دالة قابلة للاشتقاق على المجال $(0, \infty)$ ومشتقاها يعطى بالعلاقة:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{2x}) = -2e^{2x} < 0$$

وبالتالي $g(x)$ هي دالة متناقصة تماما $(0, \infty)$.

تمرين (7): لتكن لدينا الدالتين الدرجيتين التاليتين:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \quad , \quad g(x) = \lceil x \rceil$$

حيث الدالة $f(x)$ هي دالة درجية سفلية وهي عبارة عن أكبر عدد صحيح لا يتجاوز ال x

وحيث الدالة $g(x)$ هي دالة درجية علوية وهي عبارة عن أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي x

والمطلوب:

١- رسم كل من الدالتين على المجال $[-3,3]$ وتبيان فيما إذا كانت الدالتين السابقتين هي دوال مضطردة.

٢- هل f دالة ذات تغير محدود على الفترة $[-3,3]$ وإذا كان كذلك أوجد التغير الكلي لهذه الدالة.

٣- هل g دالة ذات تغير محدود على الفترة $[-3,3]$ وإذا كان كذلك أوجد التغير الكلي لهذه الدالة أيضاً.

الحل:: إن الدالة $f(x)$ المعرفة على المجال $[0,3]$ هي:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

وإذا كان

$$-3 \le x < -2 \Rightarrow f(x) = -3 \quad , \quad -2 \le x < -1 \Rightarrow f(x) = -2$$

$$-1 \le x < 0 \Rightarrow f(x) = -1 \quad , \quad 0 \le x < 1 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \le x < 2 \Rightarrow f(x) = 1 \quad , \quad 2 \le x < 3 \Rightarrow f(x) = 2$$

$$x = 3 \Rightarrow f(x) = 3$$

إن الدالة $g(x)$ المعرفة على المجال $[0,3]$ هي:

$$g(x) = \lceil x \rceil$$

وإذا كان

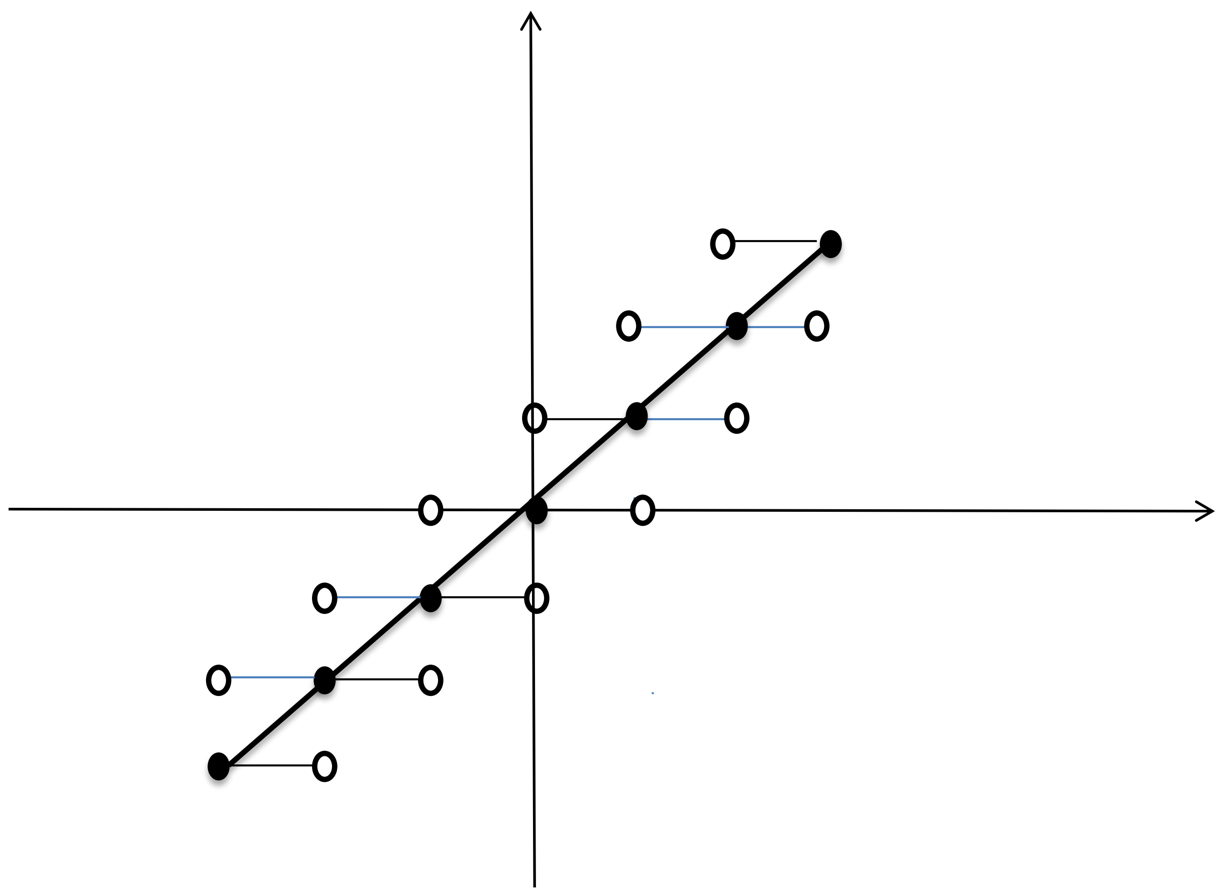
$$x = -3 \Rightarrow g(x) = -3 \quad , \quad -3 < x \le -2 \Rightarrow g(x) = -2$$

$$-2 < x \le -1 \Rightarrow g(x) = -1 \quad , \quad -1 < x \le 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

$$0 < x \le 1 \Rightarrow g(x) = 1 \quad , \quad 1 < x \le 2 \Rightarrow g(x) = 2$$

$$2 < x \le 3 \Rightarrow g(x) = 3$$

ويكون للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ الرسم البياني التالي:



ووضوحاً الدالتين $f(x)$و $g(x)$ متزايدتين وبالتالي هما ذات تغير محدود على المجال $[-3,3]$ والأكثر من ذلك يعطى التغير الكلي لكل منهما بالعلاقة التالية وذلك حسب المعايير المدروسة:

$$\overset{3}{\underset{-3}{V}} f = f(3) - f(-3) = 3 - (-3) = 6$$

$$\overset{3}{\underset{-3}{V}} g = g(3) - g(-3) = 3 - (-3) = 6$$

ملاحظة هامة جداً: نلاحظ أن الدالة $f(z)$ تأخذ قيماً ثابتة على كل مجال جزئي من المجال $[-3,3]$ وبالتالي هي دالة ذات تغير محدود حسب ملاحظة سابقة والتغير الكلي يساوي إلى مجموع القفزات بالقيمة المطلقة.

تمرين(8): بين أن الدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة $[-5,5]$ هي دالة ذات تغير محدود على هذه الفترة وأوجد التغير الكلي وبحيث:

$$f(x) = x - |x| \quad ; \quad x \in [-5,5]$$

الحل: بالنسبة للدالة $f(x) = x - |x|$ فلنبرهن أن الدالة $f(x)$ تحقق شرط ليبشتز من المرتبة الأولى :

أي من أجل أي عنصرين u, v لنبحث عن عدد ثابت $L > 0$ بحيث تكون المتراجحة التالية محققة:

$$|f(u) - f(v)| \leq L|u - v|$$

لدينا:

$$|f(u) - f(v)| = |(u - |u|) - (v - |v|)| = |(u - v) - (|u| - |v|)|$$

وحسب خواص القيمة المطلقة نجد أن:

$$|(u - v) - (|u| - |v|)| \leq |\mathrm{u} - \mathrm{v}| + \big||\mathrm{u}| - |\mathrm{v}|\big| \leq$$

$$|u - v| + |u - v| = 2|u - v|$$

وبالتالي نستنتج أن:

$$|f(u) - f(v)| \leq 2|u - v|$$

وبالتالي وجد العدد $L = 2$ والذي من أجله يكون شرط ليبشتز محقق.

وبالتالي نستنتج أن الدالة $f(x)$ هي دالة ذات تغير محدود.

أو بطريقة ثانية:

إن $g(x) = x$ هي دالة متزايدة على المجال $[-5,5]$ وبالتالي هي دالة ذات تغير محدود وكونها ذات تغير محدود فدالة القيمة المطلقة لها دالة ذات تغير محدود حسب خواص د.ت.م

وفرق دالتين ذات تغير محدود هو دالة ذات تغير محدود وبالتالي الدالة المعطاة هي دالة ذات تغير محدود.

أو بطريقة ثالثة: إن الدالة f والتي قاعدة ربطها $f(x) = x - |x|$ والمعرفة على الفترة $[-5,5]$ تكتب بالشكل:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; \quad -5 \leq x < 0 \\ 0 & ; \quad 0 < x \leq 5 \end{cases}$$

ويكون لدينا:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & ; \quad -5 \leq x < 0 \\ 0 & ; \quad 0 < x \leq 5 \end{cases}$$

ونلاحظ أن $f'(x) \geq 0$ وبالتالي حسب مبرهنة تكون الدالة f هي دالة متزايدة على الفترة $[-5,5]$ وبالتالي حسب مبرهنة تكون د.ت.م ويعطى التغير الكلي بالعلاقة:

$$\overset{5}{\underset{-5}{V}}(f) = f(5) - f(-5) = 0 - (-10) = 10$$

أو بطريقة رابعة لدينا $|f'(x)| \leq 2$ والمشتق محدود وبالتالي حسب مبرهنة تكون الدالة f هي د.ت.م والتغير الكلي يعطى بالعلاقة:

$$\overset{5}{\underset{-5}{V}}(f) = \int_{-5}^{5} |f'(x)|dx = \int_{-5}^{0} 2dx + \int_{0}^{5} 0dx = \int_{-5}^{0} 2dx = 10$$

نهاية حل تمارين الدفعة الأولى