الفصل الأول

جبر المنطق والمجموعات

Logic Algebra and Sets

1. جبر المنطق

1- القضايا وجداول الحقيقة

القضية: تعرف القضية على أنها نص يأخذ أحد القيمتين المنطقتين:

صحيحة (T) أو خاطئة (F).

في الرياضيات، ننطلق عادة من عدد صغير من القضايا والتي نفرضها صحيحة وندعوها بالبديهيات، نقوم بتعميم هذه النصوص أو القضايا الصحيحة عن طريق الإثبات (البرهان) وذلك باستخدام بعض القواعد المنطقية.

انطلاقاً من قضيتين A, B نستطيع الحصول على خمس قضايا جديدة وهي $\neg A$ (نفي A) و $A \wedge B$ و تقرأ (A و B) والقضية $A \vee B$ وتقرأ (A أو B) والقضية $A \Rightarrow B$ وتقرأ (A يقتضي B) وأخيراً القضية $A \Leftrightarrow B$ وتقرأ (A يكافئ B).

تسمح هذه الجداول بتحديد القيمة المنطقية للقضايا المركبة حيث القضية المركبة هي عبارة عن قضية جديدة نحصل عليها انطلاقاً من مجموعة من القضايا. على سبيل المثال القضية المركبة $P(A,B,C,\cdots)$ التي نحصل عليها من القضايا $A,B,C,\cdots$.

لتكن B, A قضيتين ما، فإن جدول الحقيقة الناتج عن هاتين القضيتين يعطى كما يلي:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

القضايا المتكافئة: نقول عن القضيتين $P(A,B,C,\cdots)$ و $Q(A,B,C,\cdots)$ أنهما متكافئتين إذا تطابقتا جداول الحقيقة لهاتين القضيتين ونكتب $P \equiv Q$.

ملاحظة: إن القيم الواردة في الجدول السابق تبدو منطقية ما عدا القيم التي تخص القضية $A \Rightarrow B$. نلاحظ أنه إذا كانت القضية A خاطئة فإن القضية $A \Rightarrow B$ صحيحة مهما تكن القيمة المنطقية للقضية B.

نستخدم الاقتضاء للحصول على نتائج جديدة. فمثلاً إذا كانت القضية A صحيحة واستطعنا إثبات أن القضية $A \Rightarrow B$ صحيحة فإننا نستطيع أن نقول أن B صحيحة وذلك باستخدام جدول الحقيقة.

2- إثبات القضايا

لإثبات صحة القضية $A \Rightarrow B$ نستخدم إحدى الطريقتين التاليتين:

1- الطريقة المباشرة: حيث نفترض أن A صحيحة ونثبت أن B صحيحة أيضاً.

2- طريقة نقض الفرض: نفرض أن B خاطئة ونثبت أن A خاطئة أيضاً.

لإثبات صحة القضية $A \Leftrightarrow B$ نقوم بما يلي:

1- نثبت أن $A \Rightarrow B$ صحيحة. 2- نثبت أن $B \Rightarrow A$ صحيحة.

3- الإثبات بطريقة النفي: نفرض أن القضية B خاطئة. إذا حصلنا على تناقض مع صحة القضية A فإن B صحيحة.

تدريبات

1- أثبت أن العدد الحقيقي $\sqrt{2}$ هو عدد غير عادي.

2- أثبت صحة ما يلي:

1- $A \equiv \neg(\neg A), \quad A \equiv A \vee A \equiv A \wedge A$

2- $A \wedge B \equiv B \wedge A; \quad A \vee B \equiv B \vee A$

3 - $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$

$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$

4- $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$

$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$

5- $A \Rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B$

$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

6- $A \Rightarrow B \equiv (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

7- $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge (\neg B)$

2. المجموعات

1- تعاريف أساسية

- إن مفهوم المجموعة من البداهة بحيث لا يحتاج إلى تعريف.
- إن مجموعة الأشياء التي تشكل المجموعة تدعى بالعناصر.
- نرمز عادة للمجموعة بأحرف كبيرة A وللعناصر بأحرف صغيرة a ونستخدم الرمز $a \notin A$ للدلالة على أن a ليس عنصراً من A.

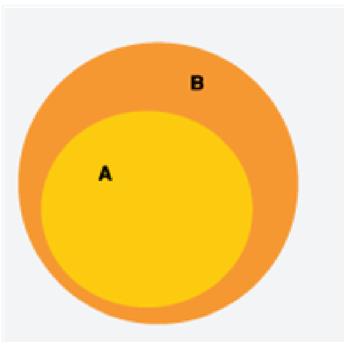
المكممات

لتكن $P(a)$ خاصة تتعلق بالعنصر a حيث $a \in A$. نرمز بما يلي:

- $\forall a \in A; P(a)$ للدلالة على أن الخاصة $P(a)$ صحيحة من أجل جميع العناصر a من المجموعة A. نسمي الرمز $(\forall)$ بمكمم الشمول.
- $\exists\, a \in A; P(a)$ للدلالة على أنه يوجد عنصر على الأقل من المجموعة A بحيث تكون من أجله الخاصة $P(a)$ صحيحة. تسمى الرمز$(\exists)$ بمكمم الوجود.
- $\exists!\, a \in A; P(a)$ للدلالة على أنه يوجد عنصر وحيد تكون من أجله القضية $P(a)$ صحيحة.

الاحتواء Inclusion

لتكن A, B مجموعتين ما. نقول أن A محتواه في B إذا كانت جميع عناصر A هي عناصر من B ونرمز لذلك بالرمز $A \subset B$ ونقول أيضا إن A هي مجموعة جزئية من B.



المجموعة الخالية

ونرمز لها بالرمز $\varnothing$ وهي المجموعة التي لا تحوي عناصر نلاحظ أن من أجل كل مجموعة A فإن $\varnothing \subset A$.

مثال: لتكن لدينا المجموعة $A=\{\{\varnothing\},1,N,\{0,1,2\}\}$. ضع الإشارات التالية $\subset$ أو $\not\subset$ أو $\in$ أو $\notin$ في المكان المناسب.

- $\phi \ldots A$
- $\{\varnothing\} \ldots A$
- $N \ldots A$
- $\{\varnothing, N\} \ldots A$

لإثبات أن $A \subset B$ نتبع ما يلي:

ليكن $x \in A$ عنصر كيفي ولنثبت إذن أن $x \in B$.

إن $A=B$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط $A \subset B$ و $B \subset A$.

ولإثبات أن $A=B$ نتبع ما يلي:

1- نثبت أن $A \subset B$ ...

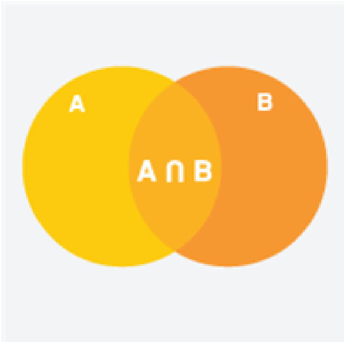
2- نثبت أن $B \subset A$ ...

العمليات على المجموعات

1- التقاطع Intersection

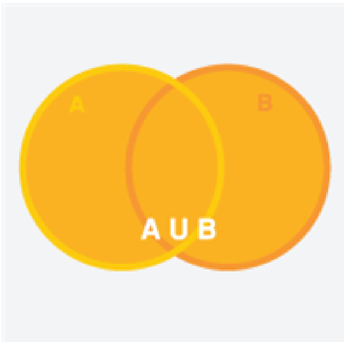
لتكن A, B مجموعتين. نعرف تقاطع A, B ونرمز له $A \cap B$ على أنه مجموعة العناصر x حيث x هو عنصر من A و من B بآن واحد.

ونكتب $A \cap B = \{x; (x \in A) \wedge (x \in B)\}$



2- الاجتماع Union

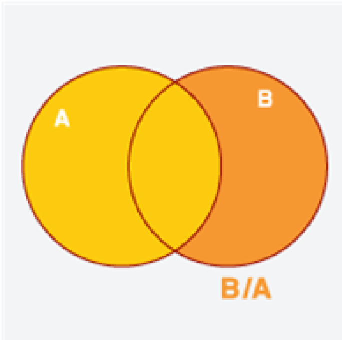
نعرف اجتماع A, B ونرمز له $A \cup B$ على أنه مجموعة العناصر x حيث x هو عنصر من A أو عنصر من B. و نكتب $A \cup B = \{x; (x \in A) \vee (x \in B)\}$



3- الفرق Difference

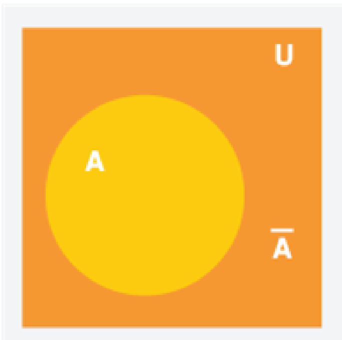
نعرف A فرق B ونرمز له $A\setminus B$ على أنه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B ونكتب $A\setminus B=\{x;(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$

وبنفس الشكل نعرف $B\setminus A$ و نكتب $B\setminus A=\{x;(x\in B)\wedge(x\notin A)\}$



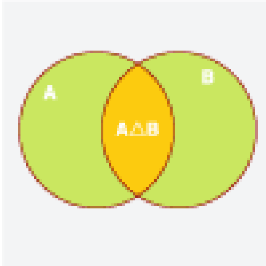
4- المتمم النسبي Complement

نسمي متمم المجموعة A بالنسبة للمجموعة E حيث $A\subset E$ على أنه مجموعة العناصر x من E والتي لا تنتمي إلى A أي أن $\overline{A}=\{x;(x\in E)\wedge(x\notin A)\}$



5- الفرق التناظري Symmetric Difference

نرمز له $A\Delta B$ ويعرف بالعلاقة التالية $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$



6- مجموعة الأجزاء Set of Partitions

لتكن Ω مجموعة ما. نرمز بالرمز $P(\Omega)$ للمجموعة التي عناصرها هي عبارة عن جميع المجموعات الجزئية المحتواة في Ω.

مثال

لتكن لدينا المجموعة $\Omega = \{1,2,3\}$.

عندئذ $P(\Omega) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1.2\}, \{1.3\}, \{1.2.3\}\}$

7- الجداء الديكارتي Cartesian Product

لتكن A, B مجموعتين ما. نرمز بالرمز $A \times B$ للمجموعة المؤلفة من الثنائيات (a,b) حيث $a \in A$ و $b \in B$. نسمي المجموعة $A \times B$ بالجداء الديكارتي للمجموعتين A, B.

وبنفس الشكل نعرف الجداء الديكارتي لـ n مجموعة $A_1, A_2, \cdots, A_n$ أي أن $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ ونكتبه أيضاً $\prod_{i=1}^{n} A_i$ على أنه المجموعة المؤلفة من العناصر من الشكل $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ حيث $a_i \in A_i$ من أجل $i = 1,$ $i = 1, \ldots, n$.

ملاحظات

إن $(a,b) \neq (b,a)$ وكذلك لا يجب الخلط بين $\{x, y\}$ والثنائية (x, y).

مثال لتكن $\begin{array}{l} A=\{a_1,a_2,......,a_n\} \\ B=\{b_1,b_2,......,b_m\} \end{array}$

$A\times B$	$b_1......................b_m$
a_1	$(a_1,b_1)..............(a_1,b_m)$
.	.
.	.
.	.
a_n	$(a_n,b_1)..............(a_n,b_m)$

3. التطبيقات Mappings

1- تعاريف أساسية

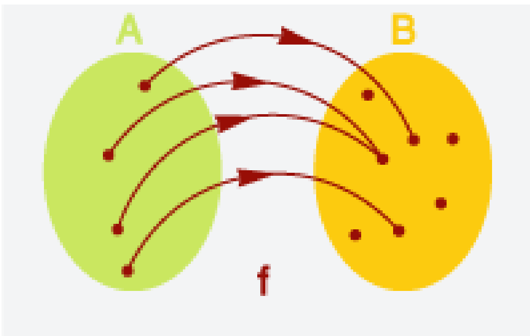
لتكن $G\subset A\times B$ مجموعة جزئية من الثنائيات التي تحقق الشرط:

$$\forall x\in A;\exists! y\in B;\quad (x,y)\in G$$

إذن نقوم بربط كل عنصر x من A بعنصر وحيد y من المجموعة B ونرمز لـ y بـ $f(x)$ و بحيث يكون $(x,y)\in G$ عندئذ نقول أن G هو بيان تابعي. ونسمي f تطبيق من A إلى B ونرمز لذاك بـ:

$$\begin{array}{l} f:A\to B \\ \quad x\to y=f(x) \end{array}$$

أو بالرمز $A\xrightarrow{f}B$. نسمي $y=f(x)$ صورة x بواسطة التطبيق f.



ليكن $f: A \to B$ و $f: A' \to B'$ نقول أن $f = g$ إذا تحققت الشروط التالية :

- $A = A`, \text{and } B = B`$
- $\forall x \in A \; ; \quad f(x) = g(x)$

التطبيق المطابق

لتكن A مجموعة ما. نسمي التطبيق I_A المعرف كما يلي :

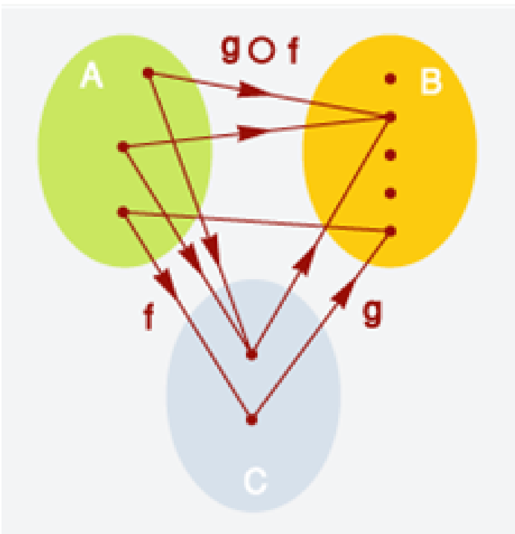
$$\begin{aligned} I_A : A &\to A \\ x &\to x \end{aligned}$$

بالتطبيق المطابق.

2- تركيب التطبيقات Composition

ليكن لدينا التطبيق $f: A \to B$ و $g: B \to C$ فإننا نعرف تركيب التطبيقين g, f على أنه التطبيق :

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ x &\to g(f(x)) \end{aligned}$$



مبرهنة

1- ليكن لدينا التطبيقات $f:A\to B$ و $g:B\to C$ و $h:C\to D$.

عندئذٍ ho (gof) = (hog) of

2- إن $f\circ I_A = I_B\circ f = f$

الإثبات:

1-

$$\left.\begin{aligned}\forall x\in A;(ho(gof))(x)&=h[(gof)(x)]\\&=h[g(f(x))]\\&=h(g(f(x)))\quad(1)\end{aligned}\right\}\text{حسب تعريف التطبيق المطابق}$$

$$\begin{aligned}\forall x\in A;\quad((hog)of)(x)&=(hog)(f(x))\\&=(hog)(y)\quad;y=f(x)\in B\\&=h(g(y))\\&=h(g(f(x))\quad(2)\end{aligned}$$

بمقارنة (1) و (2) يتم إثبات القسم الأول من المبرهنة.

2- إن

$$\begin{aligned}I_B:B\to B;\quad &I_A:A\to A\\ y\to y\qquad &x\to x\end{aligned}$$

ومنه:

$$\forall x\in A;\quad (f\circ I_A)(x)=f(I_A(x))=f(x)\quad(3)$$

لأن $I_A(x)=x$ وكذلك:

$$\begin{aligned}\forall x\in A;\quad (I_B\circ f)(x)&=I_B(f(x))=I_B(y)=y;\ y=f(x)\in B\\&=f(x)\quad(4)\end{aligned}$$

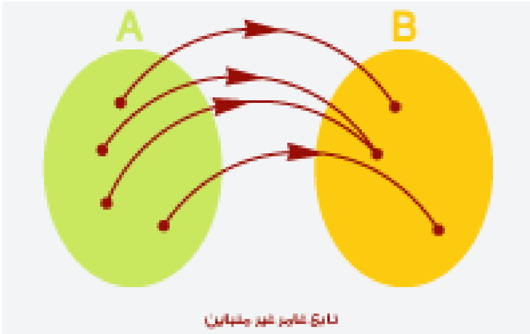
بمقارنة (3) و (4) نجد أن $I_B\,of = fo\,I_A$

3- التطبيقات الغامرة والمتباينة والتقابل

ليكن $f : A \to B$ تطبيقاً ما. نقول أن:

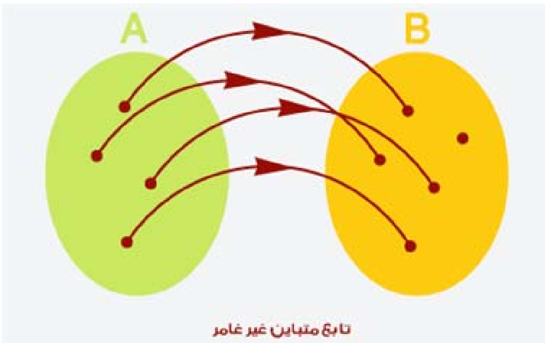
1- f **غامر (surjective)** إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\ y \in B; \exists\ x \in A;\ y = f(x)$$



2- f **متباين (injective)** إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall (x, y) \in A^2;\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$



ليكن $f : A \to B$ تطبيقاً ما. نقول أن:

3- f **تقابل (bijective)** إذا وفقط إذا كان f غامر ومتباين.

ملاحظات

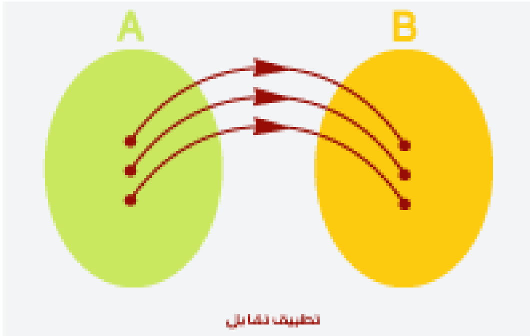
1- f غامر: كل عنصر من المستقر هو صورة لعنصر على الأقل من المنطلق.

2- f متباين $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in A^2; x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

أي أنه من أجل كل عنصرين مختلفين من المنطلق فإن صورتهما وفق f مختلفين.

3- f تقابل إذن كل عنصر من المستقر هو صورة لعنصر وحيد من المنطلق أي:

$\forall y \in B; \exists ! x \in A; y = f(x)$



فيما يلي نعطي بعض القواعد المتبعة أثناء حل التمارين التي تتعلق بالتطبيقات.

لإثبات أن التطبيق f غامر: نفرض أن $y \in B$ ولنضع $x = \cdots$ ومن ثم نحاول أن نثبت أن $y = f(x)$.

لإثبات أن التطبيق f متباين: لتكن $y \in A, x \in A$ ولنفـرض أن $f(x) = f(y)$ و نحاول أن نثبت أن $x = y$.

لإثبات أن f تقابل نثبت أنه غامر ومتباين.

مثال

لتكن P مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية، وليكن التطبيق:

$f : N \to P$ حيث $\forall n \in N; f(n) = 2n$. أثبت أن f هو تقابل.

الحل:

- نثبت أولاً أنه غامر: لتكن $y \in P$ عنصر كيفي من المجموعة P عندئذ يوجد عدد طبيعي k بحيث $y = 2k$ لأن y هو عدد طبيعي زوجي.

بفرض أن $x = k$ نجد أن: $f(x) = f(k) = 2k = y$ إذن $y = f(x)$ وبالتالي f تطبيق غامر.

- ليكن لدينا العنصرين y, x من N حيث $x = y$ ومنه $2x = 2y$ إذن $f(x) = f(y)$ وبالتالي f متباين.

إذن f تقابل وهو المطلوب.

مبرهنة (خواص التطبيقات المركبة):

ليكن لدينا التطبيقات $f:A\to B$ و $g:B\to C$ عندئذٍ

1- إذا كان f و g متباينين فإن gof متباين.

2- إذا كان f و g غامرين فإن gof غامر.

3- gof تطبيق متباين فإن f متباين.

4- gof غامر فإن g غامر.

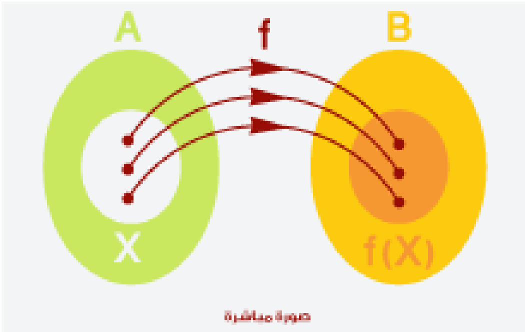
الإثبات: سهل يترك للطالب بالاعتماد على ما سبق.

4- التطبيقات العكسية

تعريف الصورة المباشرة

لتكن X مجموعة جزئية من A أي $A\supset X$ عندئذ تعرف الصورة المباشرة لـ X ونرمز لها بـ $f(x)$ على الوجه الآتي:

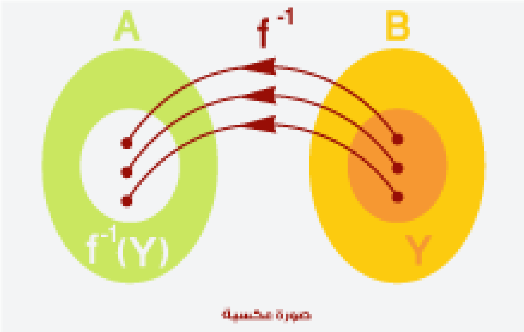
$$f(X)=\{b\in B;\exists a\in X, b=f(a)\}$$



تعريف الصورة العكسية

نعرف الصورة العكسية $f^{-1}(Y)$ للمجموعة الجزئية $Y\subset B$ بالعلاقة:

$$f^{-1}(Y)=\{a\in A;f(a)\in Y\}$$



إن المبرهنة التالية تسمح لنا بتعريف التطبيق العكسي وذلك بإعطاء الشرط اللازم والكافي لوجود مثل هذا التطبيق:

مبرهنة (التقابل العكسي):

ليكن $f:A\to B$ عندئذٍ f تقابل إذا وفقط إذا وجد التطبيق $g:B\to A$ والذي يحقق مايلي:

$$gof = I_A \ \& \ fog = I_B$$

في حال وجود مثل هذا التطبيق فإنه وحيد ويدعى بالتقابل العكسـي ونرمز له بـ f^{1} أي أن:

$$f^{-1}of = I_A \ \& \ fof^{-1} = I_B$$

مبرهنة (التقابل العكسي تطبيق مركب):

ليكن $f:A\to B$ و $g:B\to C$ تطبيقين متباينين عندئذ التطبيق المركب gof متباين و

$$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$$

ملاحظات

لكي تثبت أن $x\in f^{-1}(Y)$ اتبع الخطوات التالية:

- أحسب $f(x)$.
- حاول أن تستنتج أن $f(x)\in Y$ وبالتالي تكون أثبت أن $x\in f^{-1}(Y)$.

لكي تثبت أن $y\in f(X)$ اتبع الخطوات التالية:

- ضع $x = ...$

- استنتج أن $y = f(x)$ وأن $x \in X$ وبالتالي $y \in f(x)$.

مثال

ليكن لدينا $f : A \to B$ وليكن $X_1, X_2 \subset A$

و $Y_1, Y_2 \subset B$ أثبت أنه إذا كانت $Y_1 \subset Y_2$

فإن $f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$

الحل:

(حسب تعريف الصورة العكسية) $\forall \quad x \in f^{-1}(Y_1) \Rightarrow f(x) \in Y_1$

ولكن $Y_1 \subset Y_2$ وبالتالي $f(x) \in Y_2$ ومنه $x \in f^{-1}(Y_2)$

وبالتالي $f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$

4. الجماعة Family

تعريف الجماعة

لتكن لدينا المجموعتان A, I نسمي جماعة من عناصر A بالدليل I التطبيق:

$$\phi : I \to A$$
$$i \to a_i .$$

ونرمز لهذا التطبيق بـ $(a_i)_{i \in I}$

مثال

عندما $I = \mathbb{N}$ and $A = \mathbb{R}$ فعندئذٍ الجماعة $(a_i)_{i \in I}$ تعرف ما سميناه سابقاً بالمتتالية.

تعريف (جماعة الأجزاء):

لتكن I, A مجموعتان ما، نعرف جماعة من أجزاء المجموعة A كما يلي:

$$(A_i)_i \in I; \quad \forall \quad i \in I; \quad A_i \in P(A)$$

حيث $P(A)$ هي مجموعة أجزاء المجموعة A.

ونعتمد الرموز التالية:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{a \in A \mid \forall i \in I; \quad a \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{a \in A \mid \exists\, i \in I; a \in A_i\}$$

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \mid \forall\, i \in I; \quad a_i \in A_i\}$$

مثال1:

عندما $I = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ فإن:

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$\prod_{k=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

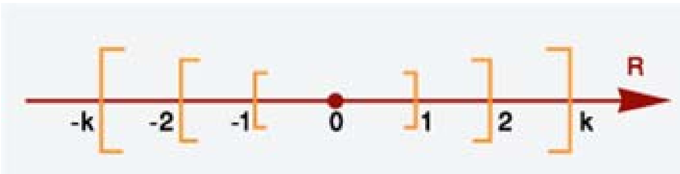
مثال2:

لتكن $A = \mathbb{R}$ و $I = \mathbb{N}^*$

ولنضع $A_k = [-k, k]$ حدد المجموعات التالية:

$$\bigcup_{k\in N^*} A_k \quad , \quad \bigcap_{k\in N^*} A_k$$

الحل:



نلاحظ أن $A_1 = [-1, 1]$ و $A_2 = [-2, 2]$ و $A_3 = [-3, 3]$ .... $\mathbb{R} = A_\infty =]-\infty, +\infty[$

نستنتج إذن: $A_1 \subset A_2 \subset ....\subset A_\infty = \mathbb{R}$ و

$$\bigcap_{k\in N^*} A_k = \{a \in \Re \mid \forall\, k \in N; a \in A_k\}$$

إذن إذا كان $a \in \bigcap_{k\in N^*} A_k$ فإن $a \in A_1$ و بالتالي $\bigcap_{k\in N^*} A_k \subset A_1$

وكذلك لدينا A_1 محتواة في كل مجموعة إذن $A_1 \subset \bigcap_{k\in N^*} A_k$ ومنه $\bigcap_{k\in N^*} A_k = A_1$

نلاحظ أن $\bigcup_{k\in N^*} A_k = A_\infty = R$ وذلك لأن R تشمل جميع المجموعات الجزئية A_K .

5. العلاقات الثنائية

تعريف

لتكن E مجموعة ما، نسمي علاقة ثنائية على E كل مجموعة جزئية $G \subset E \times E$.

إذا كانت $(x, y) \in G$ فإننا نكتب:

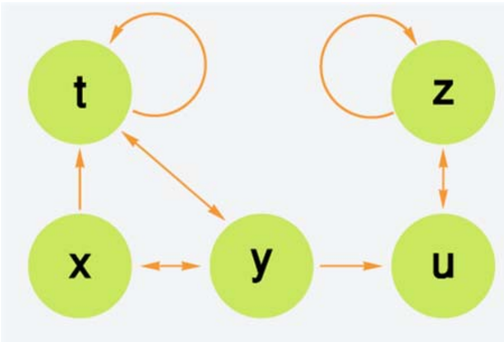
$$x \Re y \Leftrightarrow (x, y) \in G$$

$x \Re y$ تُقرأ x يرتبط بـ y وفق $\Re$.

كل علاقة تمثل بيانياً بمخطط سهمي كما في المثال التالي:

لنفرض أن $G = \{(x, y), (x, t), (y, x), (y, t), (y, u), (t, y), (t, t), (u, z), (z, u), (z, z)\}$

فعندئذٍ المخطط السهمي لهذه العلاقة يعطي بالشكل التالي:



1- خواص العلاقة الثنائية

لتكن $\Re$ علاقة على مجموعة E، نقول أن $\Re$:

1- انعكاسية: إذا وفقط إذا كان أجل عنصر x من E فإن x يرتبط بـ x أي أن:

$$\Re \text{ انعكاسية } \Leftrightarrow \forall x \in E;\quad x \Re x \ \left((x, x) \in G\right)$$

2- تناظرية: إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\,(x,y)\in E\times E=E^2, x\Re y\Rightarrow y\Re x$$

3- تخالفية: إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\,(x,y)\in E^2,\quad x\Re y\quad and\quad y\Re x\Rightarrow x=y$$

4- متعدية: إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall\,(x,y,z)\in E^3,\quad x\Re y\quad and\quad y\Re z\Rightarrow x\Re z$$

2- علاقة التكافؤ

نقول عن علاقة ثنائية على E أنها علاقة تكافؤ إذا وفقط إذا كانت:

1- انعكاسية. 2- تناظرية. 3- متعدية.

مثال

إن علاقة المساواة فوق مجموعة ما هي علاقة تكافؤ.

$$\forall\,(x,y)\in E^2;\quad x\Re y\Leftrightarrow x=y$$

صفوف التكافؤ

لتكن $\Re$ علاقة تكافؤ على E وليكن x عنصر من E

نسمي المجموعة $C_x=\{y\in E\,;y\,\Re x\}$ بصف تكافؤ العنصر x.

ملاحظة: إذا كانت $\Re$ علاقة تكافؤ عندئذ نكتب $x=y \mod \Re$ عوضاً عن $x\,\Re y$ ونقرأ:
" x يساوي y بالقياس $\Re$"

تعريف التجزئة (Partition)

لتكن $(E_i)_{i\in I}$ جماعة من أجزاء E، نقول عن هذه الجماعة أنها تشكل تجزئة للمجموعة E إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

1- $\forall i\in I;\quad E_i\neq\phi$

2- $\forall(i,j)\in I^2;\quad E_i\cap E_j=\phi$ وهذا الشرط يكافئ الشرط

$$\forall (i,j)\in I^2; \quad E_i \cap E_j \neq \phi \Rightarrow E_i = E_j$$

-3 $\bigcup_{i\in I} E_i = E$

مبرهنة

لتكن $\Re$ علاقة تكافؤ على E عندئذ تكون الجماعة $(C_x)_{x\in E}$ المكونة من صفوف التكافؤ بالقياس $\Re$ تجزئة لـ E.

وعلى العكس تعرف كل تجزئة للمجموعة E علاقة تكافؤ صفوفها هي عناصر التجزئة نفسها.

الإثبات:

بما أن $\Re$ هي علاقة تكافؤ وبالتالي $x \in C_x$ ومنه $C_x \neq \phi$ وذلك من أجل أي $x\in E$

- لنثبت من أجل أي $(x,y)\in E^2$ فإن $C_x \cap C_y = \phi$

لنفرض العكس أي يوجد z بحيث $z \in C_x \cap C_y$ أي أن و $\Re$ x = z mod و $\Re$ y = z mod

وبما أن $\Re$ هي علاقة تكافؤ فهي متعدية وتناظرية إذن $\Re$ x = y mod وبالتالي:

$$\forall \quad u\in C_x \quad \Leftrightarrow \quad u = x \bmod \Re \Leftrightarrow u = y \bmod \Re \Leftrightarrow u \in Cy$$

ومنه: $C_x = C_y$ وبالتالي نستنتج أن صفوف التكافؤ منفصلة مثنى مثنى.

- إن $E = \bigcup_{x\in E}\{x\} \subset \bigcup_{x\in E} C_x$

ولكن $C_x \subset E$ وبالتالي $\bigcup_{x\in E} C_x \subset E$ ومنه:

$$E \subset \bigcup_{x\in E} C_x \subset E \quad \Rightarrow E = \bigcup_{x\in E} C_x$$

إذن مجموعة صفوف التكافؤ تشكل تجزئة لـ E.

ـ بالعكس، إذا كانت $(E_i)_{i\in I}$ تجزئة لـ E ولنعرف العلاقة التالية:

$$x\Re y \Leftrightarrow \exists \quad i\in I \quad ; \quad (x\in E_i)\wedge(y\in E_i)$$

أثبت أن $\Re$ هي علاقة تكافؤ وأن مجموعة صفوف التكافؤ هي $E/\Re = \{E_i ; i\in I\}$.

مثال

لتكن $\Re$ علاقة ثنائية على $\mathbb{Z}$ معرفة بالشكل التالي:

$$\forall(n,p)\in\mathbb{Z}^2;\ n\Re p \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z};\ p-n=2k.$$

أثبت أن $\Re$ علاقة تكافؤ و حدد مجموعة خارج القسمة.

الحل:

- $\Re$ انعكاسية:

$$\forall n\in Z;\quad n-n=0 \Rightarrow \quad \exists k=0;\quad n-n=0=2.0$$

أي: $n\Re n$

- $\Re$ تناظرية:

$$\forall(n,p)\in Z^2;\quad n\Re P \Rightarrow \exists k\in Z;\ p-n=2k$$
$$\Rightarrow -(n-p)=2k$$
$$\Rightarrow n-p=-2k=2(-k)=2.l;l\in Z$$
$$\Rightarrow \exists l\in Z;\quad n-p=2l$$
$$\Rightarrow p\Re n$$

- $\Re$ متعدية:

$$\forall(n,p,q)\in Z^3;\quad (n\Re p)\wedge(p\Re q)$$
$$\Rightarrow (\exists k\in Z;\quad p-n=2k)\wedge(\exists l\in Z;q-p=2l)$$
$$\Rightarrow q-p+p-n=2(k+l)=2m;\ m=k+l\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow \exists m\in Z;\quad q-n=2m \Rightarrow n\Re q$$

وبالتالي $\Re$ هي علاقة تكافؤ إذن

$$\forall n\in Z;\quad C_n=\{p\in Z;\quad p\Re n\}$$
$$=\{p\in Z;\quad n-p=2k\}$$
$$=\{p\in Z;\quad n=p+2k\}$$

نستطيع التحقق أنه يوجد فقط صفي تكافؤ هما:

$$\left.\begin{array}{l} C_0=\{\cdots,-4,-2,0,\ 2,4,\cdots\} \\ \quad =\cdots=C_{-2}=C_2=\cdots \\ C_1=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\} \\ \quad =\cdots=C_{-1}=C_3=\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow E/\Re=\{C_0,C_1\}$$

3- علاقة الترتيب

تعريف

نقول عن العلاقة الثنائية $\Re$ على المجموعة أنها علاقة ترتيب إذا وفقط إذا كانت:

1- انعكاسية. 2- تخالفية. 3- متعدية.

إن علاقة الترتيب تسمح بمقارنة عنصران من E، عندما $x\Re y$ و $\Re$ علاقة ترتيب فإننا نقول أن x «أصغر من» y.

ونستخدم الرمز التالي $x \le y$ ونقول عن $(E,\le)$ أنها مجموعة مرتبة.

تعريف (الترتيب الكلي)

لتكن $\le$ علاقة ترتيب على المجموعة E، نقول عن العنصرين $(x,y)\in E^2$ أنهما قابلين للمقارنة إذا وفقط إذا كان $x\le y$ أو $y\le x$.

نقول عن المجموعة E أنها مرتبة كلياً إذا كانت كل عناصرها قابلة للمقارنة مثنى مثنى.

مثال

لتكن X مجموعة ما و $E=P(X)$ مجموعة أجزاء X ولنعرف العلاقة:

$$\forall (A,B)\in E^2,\quad A\Re B \Leftrightarrow A\subset B$$

1- أثبت أن $\Re$ علاقة ترتيب.

2- هل E مرتبة كلياً؟!

الحل:

1- $\Re$ انعكاسية لأنه:

$\forall (a,b); \quad A\subset A \Rightarrow A\Re A$

- $\Re$ تخالفية لأنه:

$\forall (A,B)\in E^2; \quad (A\Re B)\wedge(B\Re A)$
$\Rightarrow (A\subset B)\wedge(B\subset A)$
$\Rightarrow A=B$

- $\Re$متعدية لأن:

$\forall (A,B,C)\in E^3; \quad (A\Re B)\wedge(B\Re C)$
$\Rightarrow (A\subset B)\wedge(B\subset C)$
$\Rightarrow A\subset C \Rightarrow A\Re C$

إذن $\Re$ علاقة ترتيب.

2- إن E ليست مرتبة كلياً، يمكن أن نأخذ مثالاً يوضح ذلك.

لتكن: $X=\{1,2\} \Leftarrow E=P(X)=\{\phi,P\{1\},\{2\},x\}$

نلاحظ أن: $\{2\} \not\subset \{1\}$ & $\{1\} \not\subset \{2\}$

بعض التعاريف الهامة

1- لتكن لدينا علاقة الترتيب $\leq$ المعرفة على المجموعة E ولتكن $A\subset E$ ولنعرف المفاهيم التالية:

- نقول عن العنصر $M\in E$ أنه **راجح** على A إذا وفقط إذا $\forall a\in A; \quad a\leq M$.
- نقول عن $m\in E$ أنه **قاصر** عن A إذا وفقط إذا: $\forall a\in A; \quad m\leq a$
- نقول عن $X\in A$ أنه **أكبر عنصر** في A إذا وفقط إذا:

$\forall a\in A; \quad a\leq X$ ونرمز له بـ max(A)

- نقول عن $x\in A$ أنه **أصغر عنصر** في A إذا وفقط إذا:

$\forall a\in A; \quad x\leq a$ ونرمز له بـ min (A)

- نقول إن $S \ni E$ هو **الحد الأعلى** لـ A إذا وفقط إذا كان S هو أصغر العناصر الراجحة على A ونرمز له بـ $\text{Sup}(A)$.
- نقول أن I هو **الحد الأدنى** لـA إذا وفقط إذا كان I هو أكبر العناصر القاصرة عن A ونرمز له بـinf(A).

- نقول عن $y \ni A$ أنه **عنصر أعظمي** في A إذا كان وفقط إذا:

$$\forall a \in A; \quad y \leq a \Rightarrow a = y$$

- نقول عن $z \ni A$ أنه **عنصر أصغري** في A إذا وفقط إذا:

$$\forall a \in A; \quad a \leq z \Rightarrow a = z$$

2- تكن $(F, \leq), (E, \prec)$ مجموعتين مرتبين وليكن $f : E \to F$ تطبيقاً:

- نقول أن f **متزايد** إذا وفقط إذا:

$$\forall (x, y) \in E^2; \quad x \prec y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- نقول إن f **متناقص** إذا وفقط إذا:

$$\forall (x, y) \in E^2; \quad x \prec y \Rightarrow f(y) \leq f(x)$$

- نقول إن f **متزايد تماماً** إذا وفقط إذا:

$$\forall (x, y) \in E^2; \quad (x \prec y) \wedge (x \neq y) \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- نقول إن f **متناقص تماماً** إذا وفقط إذا:

$$\forall (x, y) \in E^2; \quad (x \prec y) \wedge (x \neq y) \Rightarrow f(y) < f(x)$$

- نقول إن f **مطرد** إذا كان متزايداً أو متناقصاً.

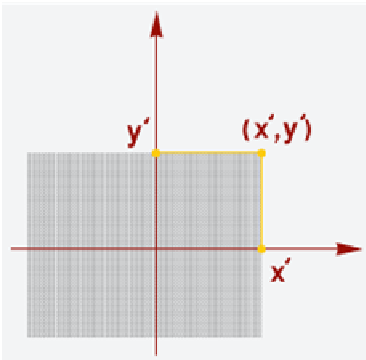
ملاحظة:

إن الرمز $a < b$ يدل على أن $(a \leq b) \wedge (a \neq b)$

مثال: لتكن $E = R^2$ ولنعرف العلاقتين التاليتين:

1- لترتيب ربع المستوى (الترتيب الجزئي).

$$(x,y) \leq_1 (x`,y`) \Leftrightarrow (x \leq x`) \wedge (y \leq y`)$$



الترتيب ربع المستوي

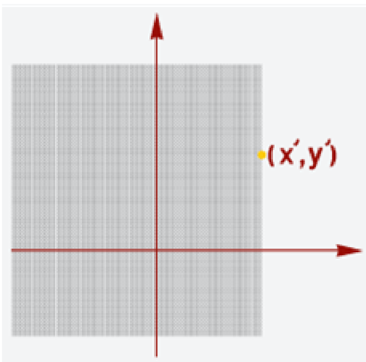
المنطقة المظللة تحوي جميع النقاط

$(x,y) \in R^2$ حيث $(x,y) \leq_1 (x',y')$

2- لترتيب نصف المستوي أو المعجمي.

$$(x,y) \leq_2 (x`,y`) \Leftrightarrow \{x \leq x`)\} \vee \}(x = x`) \wedge (y \leq y`)\}$$

$$(x,y) \leq_1 (x`,y`)$$



الترتيب نصف المستوي

المنطقة المظللة تمثل جميع النقاط

$(x,y) \in R^2$ حيث $(x,y) \leq_2 (x',y')$

أثبت أن العلاقة $\leq_1$ هي علاقة ترتيب ولكن ليست علاقة ترتيب كلي وأن العلاقة $\leq_2$ هي علاقة ترتيب كلي.