بسم الله الرحمن الرحيم

" كُتِبَ على الذين يقاتَلون بأنهم ظُلموا وأن الله على نصرهم لقدير "

" سيصيب الذين أجرموا صغار عند الله وعذاب شديد بما كانوا يمكرون "

" قل اللهم مالك الملك تؤتي الملك من تشاء وتنزع الملك ممن تشاء

وتعزّ من تشاء وتذلّ من تشاء بيدك الخير إنك على كل شيءٍ قدير "

" ربنا لا تزغ قلوبنا بعد إذ هديتنا وهب لنا من لدنك رحمة إنك أنت الوهاب "

صدق الله العظيم

الإثنين 8/10/2012 — المحاضرة الأولى

مجموعة الأعداد العقدية والمستوي العقدي المركب:

الشكل الجبري:

نرمز لمجموعة الأعداد العقدية بالرمز $\mathbb{C}$.

ونرمز للعدد العقدي بالرمز z وهو عبارة عن ثنائية (x, y)

ونكتبها بالشكل:

$$z = (x, 0) + (y, 0)$$

ويمكن أن يكتب بالشكل:

$$z = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$$

أو بالشكل:

$$z = x + iy \quad ; \quad i = \sqrt{-1} \quad ; \quad i^2 = -1$$

نسمي x القسم الحقيقي بينما نسمي y القسم التخيلي.

يكون العدد حقيقي حكماً عندما: $y = 0 \Leftarrow z = x$

يكون العدد عقدي حكماً عندما: $x = 0 \Leftarrow z = iy$

القوى:

$$i = \sqrt{-1} \quad , \quad i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 . i = -i$$

$$i^4 = i^2 . i^2 = (-1).(-1) = +1$$

$$i^5 = i^4 . i = +i$$

$$i^6 = i^2 . i^4 = (-1).(+1) = -1$$

$$i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$$

$$i^{2n+1} = i^{2n} . i = (-1)^n . i$$

/ /

مرافق العدد العقدي :

نسمي « $x - iy$ » مرافق العدد العقدي z ونرمز له بالرمز « $\bar{z}$ ».

(1) $$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$$

وهذا يعني أن القسم الحقيقي لـ z :

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

(2) $$z - \bar{z} = x + iy - x + iy = 2iy$$

وهذا يعني أن القسم التخيلي لـ z :

$$y = \frac{z + \bar{z}}{2i}$$

العمليات على الأعداد العقدية :

جمع عددين عقديين :

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2$$

$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

اذاً ناتج جمع عددين عقديين هو عدد عقدي قسمه الحقيقي مجموع القسمين الحقيقيين للعددين وقسمه التخيلي مجموع القسمين التخيليين للعددين.

فرق عددين عقديين :

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

إذاً فرق عددين عقديين هو عدد عقدي قسمه الحقيقي هو فرق القسمين الحقيقيين للعددين وقسمه التخيلي هو ناتج فرق القسمين التخيليين للعددين.

جداء عددين عقديين:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$$
$$= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2 y_1y_2$$
$$= x_1x_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) - y_1y_2$$
$$\Rightarrow z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

قسمة عددين عقديين:

نضرب بمرافق المقام

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 - i^2 y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

تمارين:

اكتب الأعداد العقدية التالية بشكلها الجبري.

1. $z = (1-i)^5$

$$z = (1-i)^5 = (1-i)^2 \cdot (1-i)^2 \cdot (1-i)$$
$$= (1 - 2i - 1)(1 - 2i - 1) \cdot (1-i)$$
$$= (-2i)(-2i)(1-i)$$
$$= (4i^2)(1-i) = -4(1-i)$$
$$\boxed{z = -4 + 4i}$$

2- $z = \frac{4}{i}$

نضرب بمرافق المقام:

$$z = \frac{4(-i)}{-i^2} = \frac{-4i}{-(-1)} = \frac{-4i}{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -4i}$$

3- $z = \frac{-15+7i}{2+i}$

نضرب بمرافق المقام:

$$z = \frac{(-15+7i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

$$z = \frac{(-15)(2)+(7)(1)}{4+1} + i\,\frac{(7)(2)-(-15)(1)}{4+1}$$

$$z = \frac{-30+7}{5} + i\,\frac{14+15}{5}$$

$$z = -\frac{23}{5} + i\,\frac{29}{5} \Rightarrow \boxed{z = -\frac{23}{5} + \frac{29}{5}i}$$

طويلة عدد عقدي

تعريف:

طويلة عدد عقدي هي ناتج الجذر التربيعي لمجموع مربعي قسميه الحقيقي والتخيلي. يرمز للطويلة بالرمز: $|\ |$

$$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$$

خواص الطويلة:

1) $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

2) $z\cdot\bar{z} = x^2+y^2 = |z|^2$

3) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

أمثلة:

أوجد طويلة كل من الأعداد العقدية التالية:

* $z_1 = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$

$x_1 = \sqrt{3} \; , \; y_1 = \sqrt{2}$

$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3+2}$

$|z_1| = \sqrt{5}$

* $z_2 = \frac{7}{(2-i)^2}$

$z_2 = \frac{7}{(2-i)^2} = \frac{7}{4-4i-1} = \frac{7}{3-4i}$

$|z_2| = \left|\frac{7}{3-4i}\right| = \frac{|7|}{|3-4i|}$

$|z_2| = \frac{7}{\sqrt{9+16}} = \frac{7}{\sqrt{25}} \Rightarrow |z_2| = \frac{7}{5}$

* $z_3 = (3+2i)^5$

$|z_3| = |(3+2i)^5| = |3+2i|^5$

$|3+2i| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$|z_3| = (\sqrt{13})^5 = (\sqrt{13})^4 \cdot \sqrt{13}$

$|z_3| = (13)^2 \cdot \sqrt{13}$

$\Rightarrow |z_3| = 169\sqrt{13}$

/ /

حل المعادلات التالية:

$$2z + i = 3 - iz$$

نعوض: $z = x + iy$

$$2(x+iy) + i = 3 - i(x+iy)$$

$$2x + 2iy + i = 3 - ix - i^2 y$$

$$2x + 2iy + i = 3 - ix + y$$

$$(2x) + i(2y+1) = (3+y) - ix$$

بالمطابقة بين الطرفين نحصل على المعادلتين:

$$2x = 3 + y \quad (1)$$

$$2y + 1 = -x \quad (2)$$

من (1) $y = 2x - 3$ نعوض في (2)

$$2(2x-3) + 1 = -x$$

$$4x - 6 + 1 = -x$$

$$4x + x = 5 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$y = 2(1) - 3 = 2 - 3 \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

وبالتالي حل المعادلة:

$$\boxed{z = 1 - i}$$

$$2z + |z| = 11 - 8i$$

نعوض: $z = x + iy$ ، $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$2(x+iy) + \sqrt{x^2+y^2} = 11 - 8i$$

$$2x + 2iy + \sqrt{x^2+y^2} = 11 - 8i$$

$$(2x + \sqrt{x^2+y^2}) + i(2y) = 11 + i(-8)$$

بالمطابقة بين الطرفين نحصل على المعادلتين:

$$2y = -8 \quad (1)$$

/ /

$$2x+\sqrt{x^2+y^2}=11 \quad (2)$$

من (1) نجد: $\boxed{y=-4}$ نعوض في (2) فنجد:

$$2x+\sqrt{x^2+16}=11$$

مجموعة التعريف: $11-2x\geq 0$ ، $x\leq\frac{11}{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+16}=11-2x$$

بتربيع الطرفين: $x^2+16=121-44x+4x^2$

$$3x^2-44x+105=0$$

وبحل معادلة الدرجة الثانية نحصل على:

مقبول $\boxed{x_2=3}$ و $x_1=\frac{35}{3}$ مرفوض لا ينتمي لمجموعة التعريف

إذاً الحل للمعادلة المعطاة هو:

$$\boxed{z=3-4i}$$

★ $z^2=\frac{1+7i}{1-i}$

نعوض: $z=x+iy$

$$(x+iy)^2=\frac{1+7i}{1-i}$$

$$x^2+2ixy+i^2y^2=\frac{(1+7i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$(x^2-y^2)+i(2xy)=\frac{1+i+7i+7i^2}{2}$$

$$(x^2-y^2)+i(2xy)=\frac{1+8i-7}{2}$$

$$(x^2-y^2)+i(2xy)=\frac{-6+8i}{2}$$

$$(x^2-y^2)+i(2xy)=-3+4i$$

بالمطابقة بين الطرفين نحصل على:

(1) $2xy=4$

(2) $x^2-y^2=-3$

من (1) $y=\frac{2}{x}$ نعوض في (2) فنجد:

$$x^2-\frac{4}{x^2}=-3$$

$$x^4+3x^2-4=0 \Leftrightarrow (x^2+4)(x^2-1)=0$$

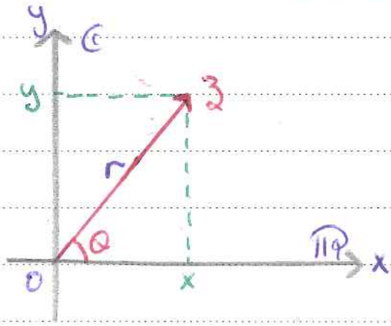
$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\mp 1$$

$$\boxed{\begin{matrix} x_1 = +1 \\ x_2 = -1 \end{matrix}} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = \frac{2}{1} \\ y_2 = \frac{2}{-1} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} y_1 = 2 \\ y_2 = -2 \end{matrix}}$$

وبالتالي يكون للمعادلة المعطاة حلان :

$$\boxed{z_1 = 1 + 2i} \quad , \quad \boxed{z_2 = -1 - 2i}$$

التمثيل الهندسي للعدد العقدي :



نرمز بـ ox المحور الحقيقي، و oy المحور التخيلي.

oy يمثل الأعداد العقدية الصرفة.

ox يمثل الأعداد الحقيقية الصرفة.

z : يمثل نقطة أو متجه مبدؤه (o)

ويمكن القول بأن كل عدد عقدي يتم تمثيله بنقطة واحدة فقط في المستوي العقدي وبالمقابل كل نقطة من المستوي العقدي تمثل عدداً عقدياً وحيداً.

أي عدد عقدي $z = x + iy$ يمكن تمثيله هندسياً بشعاع $\vec{oz}$

حيث : $\vec{oz} = \vec{r}$

وبتطبيق فيثاغورث في المثلث القائم نجد أن :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

كما أن $\vec{oz}$ يصنع مع المحور ox زاوية θ إذاً :

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \boxed{x = r \cdot \cos\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \boxed{y = r \cdot \sin\theta}$$

وبهذا نصل إلى كتابة العدد العقدي بالشكل :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

وهو ما ندعوه : الشكل المثلثي أو القطبي للعدد العقدي.

/ /

ملاحظات :

★ ليكن لدينا العدد العقدي المعطى بالشكل القطبي :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

- الزاوية θ نطلق عليها : سعة العدد العقدي ونرمز لها بالرمز : $\arg z = \theta$

- في حالة خاصة عندما $\theta \in [-\pi, +\pi]$ فإننا نسمي θ عندئذ الزاوية الرئيسية أو الرئيسية للسعة ورمزها $\mathrm{Arg}\, z$

- تحسب الزاوية الرئيسية $\mathrm{Arg}\, z$ تبعاً لموقع النقطة z في المستوي العقدي $\mathbb{C}$ وذلك من خلال العلاقات :

$\mathrm{Arg}\, z = \{$

حيث نقول بشكل عام أن :

$$\arg z = \mathrm{Arg}\, z + 2\pi k$$

- إذا كانت z تقع في الربع الأول أو الرابع من المستوي العقدي فإننا نستخدم العلاقة 1 .

أما إذا كانت z تقع في الربع الثالث فإننا نستخدم الثالثة 3

وإذا كانت z في الربع الثاني نستخدم العلاقة الثانية 2

- يكون $\mathrm{Arg}\, z > 0$ في الربعين الأول والثاني .

ويكون $\mathrm{Arg}\, z < 0$ في الربعين الثالث والرابع .

- نستخدم العلاقات الثلاث السابقة عندما يتعذر علينا إيجاد الزاوية الرئيسية $\mathrm{Arg}\, z$ هندسياً .

/ /

تمارين:

أكتب كلاً من الأعداد العقدية التالية بالشكل المثلثي:

① $z = i$

$z = 0 + i \cdot 1$

$x = 0 \quad , \quad y = 1 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1} = 1$

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1 \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

إذاً الشكل المثلثي هو:

$$\boxed{z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}}$$

② $z = -1 - i$

$x = -1 \quad , \quad y = -1$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\}$$

θ تقع في الربع الثالث لأن كلاً من sin ، cos سالبان

$\sin\theta = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{5\pi}{4}$

$\cos\theta = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4}$

إذاً الشكل المثلثي هو:

$$\boxed{z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)}$$

③ $z = 2\sqrt{3} - 2i$

$x = 2\sqrt{3} \quad , \quad y = -2$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\}$$

θ تقع في الربع الرابع لأن sin سالب و cos موجب

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta &= -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\ \cos\theta &= -\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6}\end{aligned}\right\} \theta = -\frac{\pi}{6}$$

إذاً الشكل المثلثي:

$$z = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

2012/10/10 الأربعاء — المحاضرة الثانية

مقلوب عدد عقدي:

ليكن لدينا العدد العقدي المعطى بالشكل المثلثي:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ونريد إيجاد مقلوب z.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)}$$

نلاحظ أن: $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)$

$$= \cos^2\theta - \cancel{i\sin\theta\cos\theta} + \cancel{i\sin\theta\cos\theta} - i^2\sin^2\theta$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

وبالتعويض في z^{-1} نجد:

$$z^{-1} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{1}{r} \cdot (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))}$$

/ /

مبرهنة:

بفرض z_1 ، z_2 عددان عقديان بحيث شكلهما المثلثي:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

عندئذ يكون:

① $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

② $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

البرهان:

① $z_1 \cdot z_2 = (r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)) \cdot (r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2))$

$= (r_1 \cdot r_2) \cdot [(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$

$= (r_1 \cdot r_2) \cdot [\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2]$

$\Longrightarrow z_1 z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot [\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)]$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]}$$

② $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$

$= \dfrac{r_1}{r_2} \cdot \dfrac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}$

$= \dfrac{r_1}{r_2} \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot \dfrac{1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}$

وبالاستفادة من حساب z^{-1} نجد أن:

$\dfrac{1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = [\cos(-\theta) + \sin(-\theta)]$

نعوض في $\frac{z_1}{z_2}$ فنجد :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos Q_1 + i\sin Q_1)\cdot(\cos(-Q_2) + i\sin(-Q_2))$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos Q_1 + i\sin Q_1)\cdot(\cos Q_2 - i\sin Q_2)$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos Q_1\cos Q_2 - i\cos Q_1\sin Q_2 + i\sin Q_1\cos Q_2 - i^2\sin Q_1\sin Q_2]$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos Q_1\cos Q_2 + \sin Q_1\sin Q_2 + i(\sin Q_1\cos Q_2 - \sin Q_2\cos Q_1)]$$

فيكون بالنهاية :

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(Q_1 - Q_2) + i\sin(Q_1 - Q_2)]}$$

نتائج :

(1) $$|z_1\cdot z_2| = |r_1\cdot r_2\cdot[\cos(Q_1+Q_2) + i\sin(Q_1+Q_2)]|$$

$$= |r_1\cdot r_2|\cdot\underbrace{|\cos(Q_1+Q_2) + i\sin(Q_1+Q_2)|}_{\text{طويلته = ناتج ضرب مرافقه ويساوي 1}}$$

$$\Rightarrow |z_1\cdot z_2| = |r_1\cdot r_2|\cdot(1)$$

$$\boxed{|z_1\cdot z_2| = |r_1\cdot r_2|}$$

(2) $$\arg(z_1\cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 = Q_1 + Q_2$$

أي أن سعة جداء عددين عقديين تساوي ناتج جمع سعتي هذين العددين.

③ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2}$

④ $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 = \theta_1 - \theta_2$

سعة قسمة عددين عقديين تساوي ناتج طرح السعتين.

تعميم البرهنة السابقة:

$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = (r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n) \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)]$

في حال كانت:

$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$

عندئذ نجد وفق القانون السابق أن:

$z^n = r^n \cdot [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$ A

ولكن نعلم أن: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وبالرفع إلى القوة n:

$z^n = r^n \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ B

فإذا ما قارنا بين A و B سنجد أن:

$$\boxed{[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] = [\cos\theta + i\sin\theta]^n}$$

وهو ما ندعوه بـ: علاقة دوموافر

مثال:

استخدم علاقة دوموافر في حساب:

$z = (-1 + \sqrt{3}\, i)^{10}$

الحل:

بفرض: $z_1 = -1 + \sqrt{3}\, i$

$z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذاً Q تقع في الربع الثاني:

$$\cos Q = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin Q = +\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

إذاً: $Q = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$$\Longrightarrow\quad z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

بالعودة إلى z نجد:

$$z = z_1^{10} = \left(2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{10}$$

$$= 2^{10}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{10}$$

وحسب علاقة دوموافر:

$$z = 2^{10}\cdot\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}\right)$$

$$= 2^{10}\cdot\left(\cos\left(\underbrace{\frac{18\pi}{3}}_{6\pi = 2\pi(3)} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\underbrace{\frac{18\pi}{3}}_{6\pi = 2\pi(3)} + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow\quad z = 2^{10}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 2^{10}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 2^{9}\left(-1 + \sqrt{3}\,i\right)$$

$$\Longrightarrow\quad \boxed{z = -2^{9} + i\sqrt{3}\cdot 2^{9}} \qquad 2^{9} = 512$$

جذور الأعداد العقدية

هدفنا إيجاد الجذر النوني للعدد العقدي z أي $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$

حيث $n \in \mathbb{N}^{*}$

ليكن: $z = r(\cos Q + i\sin Q)$

نرفع العدد للقوة $\frac{1}{n}$:

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\cdot(\cos Q + i\sin Q)^{\frac{1}{n}}$$

نفرض: $r^{\frac{1}{n}} = R$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{n}} = \cos\phi + i\sin\phi$$

$$r^{\frac{1}{n}} \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)^{\frac{1}{n}} = R(\cos\phi + i\sin\phi)$$

نرفع الطرفين للقوة n:

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = R^n \underbrace{[\cos\phi + i\sin\phi]^n}_{\text{حسب علاقة دوموافر}}$$

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = R^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$$

نعلم أنه إذا تساوى عددان عقديان فإن طويلتيهما تكونان متساويتين وسعتيهما متساويان أو تختلفان عن بعضهما بمضاعفات 2π.

إذاً بالمطابقة بين الطرفين نجد

$$\left.\begin{aligned} r &= R^n \\ n\phi &= \theta + 2\pi K \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} R &= r^{\frac{1}{n}} \\ \phi &= \frac{\theta + 2\pi K}{n} \end{aligned}\right.$$

حيث K تأخذ القيم من 0 إلى $(n-1)$

$$K = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

أي للعدد K قيم تقابل قيم ϕ الناتجة وهي n قيمة مختلفة وبالتالي نعطي n جذراً.

وكل جذر يحدد بالعلاقة:

$$\boxed{z_K = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos\frac{\theta + 2\pi K}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi K}{n}\right)}$$

التمثيل الهندسي لجذور عدد عقدي:

ليكن: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عدداً عقدياً له الجذور التالية:

$$z_K = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos\frac{\theta + 2\pi K}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi K}{n}\right) ; \quad K = 0, 1, \dots, n-1$$

إن الجذور السابقة تقع على محيط دائرة نصف قطرها $R = r^{\frac{1}{n}}$

/ /

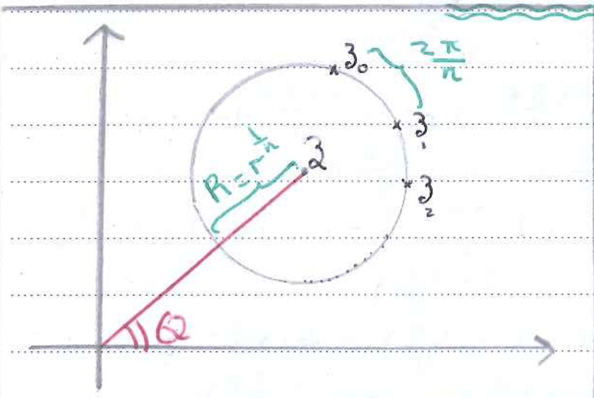
ومركزها هو نقطة الأصل

وهذه الجذور تشكل رؤوس مضلع نظامي له n ضلعاً.

والملاحظ هنا أنه بتقسيم محيط الدائرة إلى n قوساً متساوياً

فإن طول كل قوس منها سيكون مساوياً $\frac{2\pi}{n}$

وبالتالي فإن معرفة أحد الجذور قد يقودنا إلى استنتاج الجذور الأخرى



مثال:

أوجد الجذور الخمسة الأولى

للعدد: $z=1$

الحل:

$z = 1 + 0$

$z = \cos 0 + i \sin 0$

$r = 1 \quad , \quad Q = 0$

نبحث عن الجذور الخمسة الأولى إذاً: $n=5$

فيكون:

$$z_K = r^{\frac{1}{5}} \cdot \left[\cos \frac{Q+2\pi K}{5} + i \sin \frac{Q+2\pi K}{5}\right] ; K=0,1,\dots,4$$

$$z_0 = (1)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\cos \frac{0+2\pi(0)}{5} + i \sin \frac{0+2\pi(0)}{5}\right)$$

$$z_0 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\Longrightarrow z_0 = 1$$

$$z_1 = (1)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\cos \frac{0+2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$z_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\Longrightarrow z_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$$

$$z_2 = (1)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\cos \frac{0+4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}\right)$$

$$\Longrightarrow z_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$$

$$z_3 = (1)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\cos\frac{0+6\pi}{5} + i\sin\frac{0+6\pi}{5}\right)$$

$$z_3 = 1 \cdot \left(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$$

$$\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\left(\frac{5\pi}{5}+\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)$$

$$= -\cos\frac{\pi}{5}$$

$$\sin\frac{6\pi}{5} = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\frac{\pi}{5}$$

$$\boxed{z_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}}$$

$$z_4 = (1)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\cos\frac{0+8\pi}{5} + i\sin\frac{0+8\pi}{5}\right)$$

$$z_4 = 1 \cdot \left(\cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}\right)$$

$$\cos\frac{8\pi}{5} = \cos\left(\frac{10\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\sin\frac{8\pi}{5} = \sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{z_4 = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)}$$

مثال (2):

أوجد الجذر التربيعي للعدد العقدي:

$$z = 4i$$

الحل:

$$z = 4(0 + 1 \cdot i)$$

$$z = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

إذا: $r = 4$ ، $\theta = \frac{\pi}{n}$ ونبحث عن الجذر التربيعي أي $n = 2$

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) \quad ; \quad k = 0, 1$$

$$z_0 = (4)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+0}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+0}{2}\right)$$

$$z_0 = \sqrt{4} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$$

$$z_1 = (4)^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}\right)$$

$$z_1 = \sqrt{4} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$\sin \frac{5\pi}{4} = \sin\left(\frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

بالتعويض نجد:

$$z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boxed{z_1 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$$

مثال (3):

أوجد جميع جذور المعادلة:

$$z^7 - z^4 + z^3 - 1 = 0$$

الحل:

المعادلة من الدرجة السابعة إذاً نبحث عن 7 جذور مختلفة

$$z^7 - z^4 + z^3 - 1 = 0$$

$$z^4(z^3 - 1) + (z^3 - 1) = 0$$

$$(z^3 - 1)(z^4 + 1) = 0$$

إما:

$$z^3 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 = 1 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{1}$$

نبحث عن الجذر من الدرجة الثالثة لـ z إذاً لدينا $n = 3$

$z^{\frac{1}{n}}$ حيث $n = 3$

$$z = \sqrt[3]{1}$$

$$z^{\frac{1}{3}} = 1 = 1 + 0i$$

$$z^{\frac{1}{3}} = \cos 0 + i \sin 0$$

$$r = 1 \quad , \quad Q = 0 \, ,$$

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta+2\pi K}{n} + i \sin \frac{\theta+2\pi K}{n}\right]$$

حيث $K = 0, 1, 2$ ، $n=3$

$$z_0 = (1)^{\frac{1}{3}} . \left[\cos \frac{0+0}{3} + i \sin \frac{0}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{z_0 = 1} \quad 1$$

$$z_1 = (1)^{\frac{1}{3}} . \left[\cos \frac{0+2\pi}{3} + i \sin \frac{0+2\pi}{3}\right]$$

$$z_1 = 1 . \left[\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad 2$$

$$z_2 = (1)^{\frac{1}{3}} . \left[\cos \frac{0+4\pi}{3} + i \sin \frac{0+4\pi}{3}\right]$$

$$z_2 = 1 . \left[\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right]$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad 3$$

وبالعودة إلى ★

أو: $z^4 + 1 = 0$

$$\Rightarrow z^4 = -1 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1}$$

نبحث عن الجذور الرابعة للعدد -1

$$z = \sqrt[4]{-1+0i} = \sqrt[4]{\cos \pi + i \sin \pi}$$

$$n = 4 \ , \ \theta = \pi \ , \ r = 1$$

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} . \left[\cos \frac{\theta+2\pi K}{n} + i \sin \frac{\theta+2\pi K}{n}\right], K = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = (1)^{\frac{1}{4}} . \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_0 = \sqrt[4]{1} . \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i . \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad 4$$

$$z_1 = (1)^{\frac{1}{4}} \cdot \left[\cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4}\right]$$

$$z_1 = 1 \cdot \left[\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}} \; 5$$

$$z_2 = (1)^{\frac{1}{4}} \cdot \left[\cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{4}\right]$$

$$z_2 = 1 \cdot \left[\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right] \; ; \; \frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}} \; 6$$

$$z_3 = (1)^{\frac{1}{4}} \cdot \left[\cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{4}\right]$$

$$z_3 = 1 \cdot \left[\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right] \; ; \; \frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}} \; 7$$

نلاحظ أن كلاً من الجذور السابقة لها نفس الطويلة حيث
طويلة كل جذر منها تساوي الواحد . إذاً تلك الجذور تقع على محيط دائرة
نصف قطرها: $r = 1$ ومركزها

الشكل الأسي للعدد العقدي :

تذكرة: نعلم أن :

$$e^{z} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$\sin z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$\cos z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

وباستبدال z بـ θ في العبارات السابقة ونحسب القيمة:

$$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$$

نحصل حسب الإصلاح على العلاقة:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

وهي ما ندعوه: علاقة أولر

وبهذا يكون الشكل الأسي للعدد العقدي هو: $\boxed{z = r.e^{i\theta}}$

مثال:

أثبت صحة العلاقة التالية:

$$(-1+i)^7 = -8(1+i)$$

الحل:

نفرض أن: $l_1 = z = -1+i = re^{i\theta}$

نوجد كلاً من r ، θ:

$$z = -1+i = \sqrt{2}.\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

إذاً: $r = \sqrt{2}$ ، $\theta = \frac{3\pi}{4}$ فيكون: $z = \sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$

ولكن نحن لدينا: z^7 إذاً:

$$(-1+i)^7 = z^7 = (\sqrt{2})^7.e^{\frac{21\pi}{4}i}$$

$$z^7 = (\sqrt{2})^6.\sqrt{2}.e^{\frac{21\pi}{4}i} = 8\sqrt{2}.e^{\frac{21\pi}{4}i}$$

ولكن: $\frac{21\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}$

إذاً يكون: $\frac{21\pi}{4} = 6\pi - \frac{3\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$

$$z^7 = 8\sqrt{2}.e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

وهو ما يكافئ عدداً عقدياً منه: $r = 8\sqrt{2}$ ، $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ ولنكتبه بالشكل

$$z^7 = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4}\right)$$

$$z^7 = 8\cancel{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}i\right) = -8(1+i) = l_2$$

/ /

المحاضرة الثالثة: الإثنين 22 / 10 / 2012

تمارين:

1- حل جملة المعادلتين العقديتين التاليتين:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right| = \dfrac{5}{3} & \dots (1) \\ \left|\dfrac{z-4}{z-8}\right| = 1 & \dots (2) \end{cases}$$

الحل:

نعوض: $z = x + iy$ في المعادلة (1)

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{|x+iy-12|}{|x+iy-8i|} = \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|(x-12)+iy|}{|x+i(y-8)|} = \frac{5}{3}$$

نستفيد من قانون طويلة عدد عقدي:

$$\frac{\sqrt{(x-12)^2+y^2}}{\sqrt{x^2+(y-8)^2}} = \frac{5}{3}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على:

$$\frac{(x-12)^2+y^2}{x^2+(y-8)^2} = \frac{25}{9}$$

$$9x^2 - 216x + 1296 + 9y^2 = 25x^2 + 25y^2 - 400y + 1600$$

$$16x^2 + 216x + 16y^2 - 400y + 304 = 0$$

بالإتمام إلى مربع كامل: $2\left(x+\frac{27}{4}\right)^2 + 2\left(y-\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{3077}{16}$

$$\left(x+\frac{27}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{3077}{32}$$

2- أوجد $z^{\frac{1}{4}}$ إذا علمت أن: $z=-2+i2\sqrt{3}$

ثم أثبت أن جميع هذه الجذور تقع على محيط دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

الحل:

$z=-2+2\sqrt{3}\,i=4\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

فيكون: $r=4$ ، $\theta=\frac{2\pi}{3}$

ولنبحث عن الجذر من الدرجة الرابعة للعدد z أي: $n=4$

إذن: $z_k=r^{\frac{1}{n}}.\left[\cos\frac{\theta+2\pi K}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi K}{n}\right]$

حيث: $K=0,1,2,3$

$z_0=(4)^{\frac{1}{4}}.\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}}{4}\right)$

$z_0=\sqrt{2}.\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow \boxed{z_0=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}$ 1

$z_1=(4)^{\frac{1}{4}}.\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}\right)$

$z_1=\sqrt{2}.\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \boxed{z_1=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$ 2

$z_2=(4)^{\frac{1}{4}}.\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right)$

$z_2=\sqrt{2}.\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \boxed{z_2=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$ 3

$z_3=(4)^{\frac{1}{4}}.\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right)$

$z_3=\sqrt{2}.\left(\cos-\frac{\pi}{3}+i\sin-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \boxed{z_3=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$ 4

نلاحظ أن كلاً من الجذور الأربعة السابقة لها نفس الطويلة والمساوية للواحد إذاً فهي تتوزع على محيط دائرة نصف قطرها $r=\sqrt{2}$ ومركزها المبدأ.

3 - أوجد الجذور التكعيبية الثلاث للعدد: $z = i$

الحل:

$$z = 0 + i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

فتكون: $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $r = 1$ ونبحث عن الجذر من الدرجة الثالثة

أي أن: $n = 3$

$$z_K = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos\frac{\theta + 2K\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2K\pi}{n}\right) \quad ; K = 0, 1, 2$$

$$z_0 = (1)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{3}\right)$$

$$z_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} \quad 1$$

$$z_1 = (1)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right)$$

$$z_1 = 1 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$

$$\Longrightarrow \boxed{z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} \quad 2$$

$$z_2 = (1)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow z_2 = 0 + i \Longrightarrow \boxed{z_2 = i} \quad 3$$

نلاحظ أن الجذور الثلاث السابقة لها نفس الطويلة: $|z_0| = |z_1| = |z_2| = 1$ إذاً فهي تتوزع على محيط دائرة نصف قطرها: $r = 1$ ومركزها هو المبدأ.

المنحنيات والمجسمات في المستوي العقدي

تعاريف:

1- بما أن $|a-z|$ تعني البعد بين النقطتين z ، a في المستوي العقدي عندئذ يمكن أن نعرف المجموعة D على الشكل:

$$D = \{ z \in \mathbb{C} \ ; \ |z-a| = r \}$$

وندعوها: **دائرة** مركزها a ونصف قطرها r.

2- في حال كانت $a=0$ ، $r=1$ عندئذ تكون المجموعة:

$$D_0 = \{ z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| = 1 \}$$

وندعوها: **دائرة الوحدة**.

3- إن المتباينة $|z-a|<r$ تمثل مجموعة النقاط الواقعة داخل الدائرة D وتسمى هذه المجموعة: **قرص دائري مفتوح**.

4- إن المتباينة $|z-a| \leq r$ تمثل مجموعة النقاط الواقعة داخل الدائرة D بالإضافة إلى نقاط المنحني الدائري نفسه وتسمى هذه المجموعة: **قرص دائري مغلق**.

5- نقول عن مجموعة نقاط S في المستوي العقدي أنها **مجموعة مفتوحة** إذا وجد لكل نقطة من S جوار تنتمي كل نقاطه إلى S.

6- نقول عن مجموعة النقاط S أنها **مترابطة** إذا وجد من أجل أي نقطتين من S خط مضلعي مؤلف من عدد منتهي من القطع المستقيمة يصل بين هاتين النقطتين ويقع بأكمله داخل S.

/ /

7- نقول عن مجموعة النقاط S أنها **منطقة مفتوحة** إذا كانت هذه المجموعة مفتوحة ومترابطة.

مثال: إن المجموعة: $S=\{z ; |z|<6\}$ هي مجموعة مفتوحة ومترابطة وبالتالي فإنها تشكل منطقة مفتوحة.

8- نقول عن مجموعة النقاط S أنها **منطقة مغلقة** إذا كانت متممتها في المستوي العقدي هي منطقة مفتوحة.

تمارين:

عيّن في المستوي العقدي المجموعات النقطية التالية:

① $z=\bar{z}$

$x+iy=x-iy$

$2iy=0 \iff y=0$

وهي مجموعة نقاط المحور الحقيقي ox

② $|z-1-2i|=5$

$|x+iy-1-2i|=5$

$|(x-1)+i(y-2)|=5$

$(x-1)^2+(y-2)^2=25$

وهي الدائرة التي مركزها $(1,2)$ ونصف قطرها 5

③ $\left|\frac{z}{z-1}\right|=2$

$\left|\frac{x+iy}{(x-1)+iy}\right|=2 \iff \frac{|x+iy|}{|(x-1)+iy|}=2$

$\iff \frac{x^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}=4$

$$x^2+y^2 = 4(x-1)^2+4y^2$$
$$x^2+y^2 = 4x^2-8x+4+4y^2$$
$$3x^2-8x+4+3y^2=0$$
$$3\left(x^2-\frac{8}{3}x\right)+4+3y^2=0$$
$$3\left(x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}\right)-3\left(\frac{16}{9}\right)+4+3y^2=0$$
$$3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{3}+\frac{12}{3}+3y^2=0$$
$$3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+3y^2=\frac{4}{3}$$
$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$$

وهي الدائرة التي مركزها $(\frac{4}{3}, 0)$ ونصف قطرها $\frac{2}{3}$.

★ أوجد في المستوي المركب المحل الهندسي لكل مما يلي:

① $|z+1-i| < \pi$

إن المحل الهندسي الذي يحقق العلاقة السابقة هو القرص المفتوح الذي مركزه $(-1, i)$ ونصف قطره π

② $|z+i|^2 = I_m(z+2i)$

لدينا: $z+2i = x+iy+2i$
$$= x+i(y+2)$$

وبهذا يكون: $I_m(z+2i) = y+2$ بالتعويض:
$$|z+i|^2 = y+2$$
$$|x+yi+i|^2 = y+2$$
$$|x+i(y+1)|^2 = y+2$$
$$x^2+(y+1)^2 = y+2$$
$$x^2+y^2+2y+1-y-2=0$$
$$x^2+y^2+y-1=0$$

$$x^2+y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1=0$$
$$x^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$$
وهي الدائرة التي مركزها $(0, -\frac{1}{2})$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(3) $(z+\bar{z})^2+(z-\bar{z})^2=4$

نعلم أن: $z+\bar{z}=2x$ "من الخاصية الأولى"

$z-\bar{z}=2iy$ بالتعويض نجد:

$$(2x)^2+(2iy)^2=4$$
$$4x^2-4y^2=4$$
$$x^2-y^2=1$$
وهي القطع الزائد المتساوي الساقين الذي مركزه $(0,0)$

(4) $|z-1-i|=|z-5-3i|$

$$|x+iy-1-i|=|x+iy-5-3i|$$
$$|(x-1)+i(y-1)|=|(x-5)+i(y-3)|$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2=(x-5)^2+(y-3)^2$$
$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2-10x+25+y^2-6y+9$$
$$6y-2y=-10x+2x+34-2$$
$$8y=-8x+32$$
$$y=-x+4$$
وهي نقاط مستقيم غير مار بالمبدأ ميله يساوي (-1)

★ ليكن العدد العقدي z حيث: $z^2=c$ ، $\mathbb{R}$ ناقش الحالات الهندسية للعدد z.

نناقش الحالات عندما $c=0$ ، $c>0$ ، $c<0$

1) م $c=0$

$$\mathcal{R}_e\, z^2 = c$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \mp x$$

المحل الهندسي هو مستقيم إما منصف الربع الأول : $y = x$

أو منصف الربع الثاني : $y = -x$

2) $c < 0$

$$\mathcal{R}_e\, z^2 = c$$

$$x^2 - y^2 = c$$

ونفرض $c = -a$ حيث a عدد حقيقي موجب عندئذ :

$$x^2 - y^2 = -a$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 - x^2 = a$$

المحل الهندسي هو حزمة قطوع زائدة محورها المحرقي $\overrightarrow{oy}$

3) $c > 0$

$$\mathcal{R}_e\, z^2 = c$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = c$$

المحل الهندسي هو حزمة قطوع زائدة محورها المحرقي $\overrightarrow{ox}$

تعريف :

التوابع العقدية :

- لتكن A ، B مجموعتين جزئيتين من المستوي العقدي ، إذا قابلنا كل عنصر z من A بعنصر واحد فقط w من B عندئذ نقول أننا عرّفنا تابعاً عقدياً ونكتب :

$$f : A \longrightarrow B$$

$$z \longmapsto f(z) = w$$

• إذاً f تحويل «تطبيق» ينقل عناصر A إلى B حيث A مجموعة تعريف التابع : $f(z)=w$ ، و B هي مجموعة القيم.

• وإذا افترضنا أن: $z = x+iy$

عندئذٍ يكون:

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+i\,v(x,y)$$

حيث كل من u ، v دالة بمتحولين ونسمي:

القسم الحقيقي: $u(x,y)=\mathrm{Re}\, f(z)$

القسم التخيلي: $v(x,y)=\mathrm{Im}\, f(z)$

إذاً نستطيع القول أن:

كل تابع مركب في المستوي العقدي يقابله تابعين حقيقيين كل منهما بمتحولين حقيقيين.

تمرين:

أوجد مجموعة تعريف التابع: $f(z)=z^3$

الحل:

نكتب f على شكل مجموع دالتين حقيقيتين:

$$w=f(z)=z^3=(x+iy)^3$$

$$(x+y)^3 = x^3 - 3xy^2 + 3x^2yi - y^3 i$$

$$x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$$

نهاية تابع عقدي:

تجدر الإشارة إلى أن العمليات على النهايات في $\mathbb{C}$ تشابه تماماً العمليات على النهايات في $\mathbb{R}$.

تعريف:

نفرض $w = f(z)$ تابع عقدي معرف في جوار النقطة z_0 «عدا z_0 ذاتها»
نقول أن التابع: $w = f(z)$ يتقارب من العدد العقدي w_0
عندما z يتقارب من z_0 إذا وجد لكل عدد حقيقي موجب ε عدد حقيقي موجب δ تابع للعدد ε بحيث أنه إذا كان $|z - z_0| < \delta$ فإن: $|w - w_0| < \varepsilon$
ونكتب:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 ; |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

مثال:

أوجد نهايات التوابع العقدية التالية:

1. $f(z) = i\bar{z} - 3 \qquad z \to i$

$$i\bar{z} - 3 = i(x - iy) - 3$$
$$= ix - i^2 y - 3$$
$$f(z) = (y - 3) + ix$$
$$u(x,y) = y - 3$$
$$v(x,y) = x$$

عندما $z \to i$ فإن $(x,y) \to (0,1)$

$$\lim_{z \to i} f(x) = \lim_{z \to i} (i\bar{z} - 3) = \lim_{(x,y) \to (0,1)} [(y-3) + ix] = -3$$

② $f(x) = \frac{z^2}{|z|^2}$; $z \longrightarrow 0$

$$f(x) = \frac{z^2}{|z|^2} = \frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2+2ixy}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\,\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{z^2+y^2}$$

$$v(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$z = (x+iy) \longrightarrow 0 \Rightarrow (x,y) \longrightarrow 0$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^2}{|z|^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)+2ixy}{x^2+y^2} = \lim_{iy \to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

نظرية:

بفرض: $w = f(z) = u + iv$ تابعاً عقدياً حيث w معرّف بجوار النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ ماعدا z_0 ذاتها.

ولكن لدينا: $w_0 = u_0 + iv_0$ حيث: $v_0(x_0,y_0)$ ، $u_0(x_0,y_0)$

عندئذ:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

مثال (1)

أوجد نهاية التابع: $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{2x^2-yx}{y^2+1}$

عندما $z \to 1+i$

الحل:

نلاحظ أن: $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

$v(x,y) = \frac{2x^2-yx}{y^2+1}$

إن: $z_0 = 1+i \iff \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$

ولنوجد نهايات u ، v عندما $(x,y) \to (1,1)$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x^2-yx}{y^2+1} = \frac{1}{2}$$

إذاً: $u_0 = \frac{1}{2}$ ، $v_0 = \frac{1}{2}$ ويكون حسب النظرية:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + i\,v_0$$

$$\iff \lim_{z\to 1+i} f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

مثال (2)

أوجد نهاية التابع: $f(z) = \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4}$

عندما $z \to -2i$

/ /

الحل :

$$f(z) = \frac{(2z+3)(z-2)}{z^2-2z+4}$$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{(2z+3)(z-2)}{(z-2)^2}$$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{2z+3}{z-2}$$

$$z = x+iy$$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{2x+2iy+3}{x+iy-2}$$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{(2x+3)+2iy}{(x-2)+iy}$$

نضرب بالمرافق ونصلح فنحصل على :

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-2)+2y^2-7iy}{(x-2)^2+y^2}$$

وبهذا يكون :

$$u(x,y) = \frac{(2x+3)(x-2)+2y^2}{(x-2)^2+y^2}$$

$$v(x,y) = \frac{-7y}{(x-2)^2+y^2}$$

لدينا :

$$z \longrightarrow z_0 = -2i \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} u(x,y) = \frac{1}{4} = u_0 \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,-2)} v(x,y) = \frac{7}{4} = v_0$$

إذاً :

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + i v_0$$

$$w_0 = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} i$$

ملاحظة هامة :

ليكن لدينا الدالة : $w = f(z)$ ونريد حساب $\lim_{z \to \infty} f(z)$

عندئذ نستبدل كل z بـ $\frac{1}{z}$ فنحصل على دالة جديدة

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

وبهذا عندما تكون : $z \to \infty$ فإن : $\frac{1}{z} \to 0$

وندعو g الدالة الموافقة للدالة f .

مثال :

ليكن لدينا : $f(z) = \frac{2z}{z-1}$

أوجد : $\lim_{z \to \infty} f(z)$.

الحل :

$$f(z) = \frac{2z}{z-1}$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{2}{z}}{\frac{1}{z}-1} = \frac{\frac{2}{z}}{\frac{1-z}{z}} = \frac{2}{z} \cdot \frac{z}{1-z}$$

$$\Longrightarrow f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2}{1-z} = g(z)$$

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to 0} g(z) = 2$$

المحاضرة الرابعة   الأربعاء 24/10/2012

استمرار تابع عقدي

تعريف:

ليكن f تابعاً معرفاً في المنطقة D التي تحوي z_0

نقول أن التابع f مستمر في z_0 إذا كان: $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

وبلغة (δ, ε) نقول عن f أنه مستمر في z_0 إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall z \in D \quad \exists \delta > 0 \; ; \; |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

نظرية:

إذا كان f_1, f_2 تابعين مستمرين في النقطة z_0 فإن:

★ التابع $(\alpha f_1 + \beta f_2)$ يكون مستمراً في النقطة z_0.

★ التابع $(f_1 \cdot f_2)$ يكون مستمراً في النقطة z_0 $\left[(f_1 \cdot f_2)(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)\right]$

★ التابع f_1 / f_2 يكون مستمراً في z_0.

$$\left(\frac{f_1}{f_2}(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} \; ; \; f_2(z) \neq 0\right)$$

★ التابع f_1 مستمر في z_0.

نظرية:

نقول عن تابع $f(z)$ أنه مستمر في النقطة: $z_0 = x_0 + iy_0$ إذا وفقط إذا كان: $v(x,y)$ ، $u(x,y)$ مستمرين عند (x_0, y_0)

تعريف:

① إذا كانت الدالة $f(z)$ مستمرة في المنطقة D المغلقة والمحدودة عندئذ تكون هذه الدالة محدودة في هذه المنطقة.

② نقول إن التابع f مستمر بانتظام في المنطقة D إذا تحقق:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 \;;\; \forall z_1, z_2 \in D \;:\; |z_1 - z_2| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

والملاحظ أن التابع المستمر بانتظام في مجموعة ما هو تابع مستمر في تلك المجموعة ولكن العكس بشكل عام غير صحيح.

ملاحظة: إن التابع المستمر في مجموعة مغلقة ومحدودة يكون مستمراً بانتظام في تلك المجموعة.

تمارين:

① ادرس استمرار الدالة:

$$f(z) = \begin{cases} z+1 & if \quad z \neq i \\ i+1 & if \quad z = i \end{cases}$$

عند النقطة $z_0 = i$

الحل:

نلاحظ أن $f(z)$ دالة معرفة عند $z_0 = i$

لكي تكون الدالة مستمرة يجب أن يتحقق أن: $\lim\limits_{z \to i} f(z) = f(i)$

$$l_1 = \lim_{z \to i} f(z) = \lim_{z \to i} (z+1) = i+1$$

$$l_2 = f(i) = i+1 = l_1$$

إذاً الدالة f مستمرة عند $z_0 = i$.

② ادرس استمرار الدالة:

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & if \quad z \neq i \\ 0 & if \quad z = i \end{cases}$$

عند النقطة $z_0 = i$

/ /

الحل:

إن $f(z)$ معرف عند $z_0 = i$

$$l_1 = \lim_{z \to i} f(z) = \lim_{z \to i} z^2 = (i)^2 = -1$$

$$l_2 = f(i) = 0 \neq l_1$$

إذا $f(z)$ ليست مستمرة عند $z_0 = i$

3 أثبت أن الدالة: $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ غير مستمرة عندما $z \to 0$

الحل:

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{x - iy}{x + iy} \cdot \frac{(x - iy)}{(x - iy)} = \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{x^2 + y^2}$$

$$f(z) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - i\,\frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

عندما: $z \to 0$ فإن:

$$x + iy \to 0 \iff \begin{cases} x \to 0 \\ y \to 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن النهاية على المسار $x = 0$ تكون -1

و النهاية على المسار $y = 0$ هي $+1$

إذاً النهاية غير موجودة «لعدم تساوي النهايتين» وبالتالي الدالة f غير مستمرة عندما $z \to 0$

اشتقاق تابع عقدي:

ليكن f تابعاً معرفاً في جوار النقطة z_0 من المستوي العقدي $\mathbb{C}$.
نقول عن التابع $f(z)$ أنه قابل للاشتقاق في النقطة z_0 إذا وجدت النهاية:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

نسمي نهاية التابع بمشتق التابع f في النقطة z_0

ونرمز لهذا المشتق بالرمز: $f'(z_0)$ أو $\left(\frac{df}{dz}\right)_{z=z_0}$

ونلاحظ أن مشتق التابع العقدي

له نفس تعريف مشتق التابع الحقيقي.

وخواص مشتقات التوابع العقدية هي نفس خواص مشتقات

التوابع الحقيقية.

نظرية:

إذا كان لدينا تابع $f(z)$ قابل للاشتقاق في النقطة z_0 فهو مستمر

في هذه النقطة ولكن العكس ليس صحيحاً بالضرورة.

مثال:

أثبت أن التابع: $f(z)=\bar{z}$ مستمر في $z_0=0$ ولكنه غير قابل

للاشتقاق عند $z_0=0$.

الحل:

حتى يكون $f(z)$ مستمراً عند $z_0=0$ يجب أن يكون:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = f(0)$$

$$l_1=\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x+iy) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-iy)$$

$$= \lim_{x\to 0} x - i\lim_{y\to 0} y = 0$$

$$l_2=f(0)=0=l_1$$

إذاً f مستمر عند $z_0=0$

ولندرس قابلية الاشتقاق: سندرس تحقق المساواة:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$l_1 = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(0+\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{(0+\Delta z)} - \bar{0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i \Delta y}$$

ونميز حالتين :

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x = \Delta z \ , \ \Delta y = 0 \\ \Delta y = \Delta z \ , \ \Delta x = 0 \end{array}\right\}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \Longleftarrow \Delta x = \Delta z \ , \ \Delta y = 0$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y}{\Delta y} = -1 \Longleftarrow \Delta y = \Delta z \ , \ \Delta x = 0$$

حصلنا على قيمتين مختلفتين فالنهاية غير موجودة

أي أن التابع f غير قابل للاشتقاق في $z_0 = 0$

ملاحظة :

توجد الكثير من التوابع العقدية البسيطة التي لا تملك مشتقاً على الرغم من استمرارها وكمثال على ذلك :

$f(z) = \bar{z}$ المذكور في المثال السابق

و $f(z) = Re\, z$ كلاهما مستمران وغير قابلين للاشتقاق ويوجد غيرهما الكثير

التوابع التحليلية

تعريف :

- نقول عن التابع f بحيث : $w = f(z)$ أنه تحليلي في المنطقة D من المستوي العقدي $\mathbb{C}$ اذا كان قابلاً للاشتقاق في كل نقطة من D.
- ونقول عن f أنه تحليلي في النقطة z_0 اذا كان تحليلياً في جوار ما للنقطة z_0
- إن مجموع وفرق وجداء وقسمة تابعين تحليليين هو تابع تحليلي

/ /

مبرهنة :

إذا كان f تابعاً بحيث :

$$w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

معرف في المنطقة $D \subseteq \mathbb{C}$ عندئذ فإن :

الشرط اللازم والكافي لكي يكون f تحليلياً في D هو أن تكون المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى لكلا التابعين $v(x,y)$ ، $u(x,y)$ موجودة ومستمرة في كل نقطة من D و تحقق شرطي كوشي وريمان :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

مبرهنة :

ليكن لدينا الدالة : $w = f(z) = u + iv$ وكان v ، u يمتلكان مشتقات جزئية مستمرة وتحقق شرطي كوشي وريمان «أي أن الدالة f تحليلية» عندئذ فإن المشتق للدالة f هو :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

أمثلة وتمارين :

$\boxed{1}$ اختبر فيما إذا كان التابع f تحليلياً فيما يلي :

① $f(z) = \bar{z}$

$$f(z) = \bar{z} = x - iy$$

$$u(x,y) = x$$

$$v(x,y) = -y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

نلاحظ أن : $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$ إذاً الدالة f غير تحليلية

/ /

② $f(z) = z^3$

$f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3$

$\Rightarrow f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$

$v(x,y) = 3x^2y - y^3$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$ ، $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy$ ، $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$

ان المشتقات الجزئية مستمرة ونلاحظ أن:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}$

اذاً المشتقات الجزئية تحقق شرطي كوشي وريمان فالدالة f تحليلية.

③ $f(z) = z^2$

$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2$

$\Rightarrow f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy)$

$u(x,y) = x^2 - y^2$

$v(x,y) = 2xy$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ ، $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$ ، $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x$

إن المشتقات الجزئية مستمرة ونلاحظ أن:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$

اذاً المشتقات الجزئية تحقق شرطي كوشي وريمان فالدالة f تحليلية.

/ /

2 أوجد مشتق التوابع التحليلية من التمرين السابق:

$f(z) = z^3$

وجدنا أن $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$

$v(x,y) = 3x^2y - y^3$

وبما أن التابع تحليلي اذاً مشتقه يعطى بالعلاقة:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= 3x^2 - 3y^2 + i(6xy)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(z) = 3[(x^2-y^2) + 2ixy] = 3z^2}$$

$f(z) = z^2$

وجدنا أن: $u(x,y) = x^2 - y^2$

$v(x,y) = 2xy$

وبما أن التابع تحليلي إذاً مشتقه هو:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= 2x + i(2y$$

$$= 2(x+iy)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(z) = 2z}$$

قاعدة أوبيتال:

إذا كان التابعان f_1، f_2 تحليليان عند النقطة z_0 من المنطقة D

وكانت النهاية:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

تعطي عدم تعيين عندئذ:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f_1'(z)}{f_2'(z)} \quad ; \quad f_2'(z) \neq 0$$

/ /

مثال:

احسب النهاية: $\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{\sin z^2}$

نلاحظ أن:

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{\sin z^2} = \frac{0}{0}$$ عدم تعيين

$f_1(z) = 1-\cos z$ و $f_2(z) = \sin z^2$

هما تابعان تحليليان إذاً:

$$\lim_{z\to 0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{f_1'(z)}{f_2'(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{2z\cos z^2}$$

$$= \lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{\cos z^2} \right) = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

التوابع التوافقية:

نقول عن التابع u أنه توافقي في المنطقة D من المستوي العقدي إذا كان قابلاً للاشتقاق في D ومشتقاته الجزئية حتى المرتبة الثانية مستمرة في D ويحقق معادلة لابلاس التالية:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

مثال:

اختبر فيما إذا كان التابع التالي توافقي:

$$u = u(x,y) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$$

الحل:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x}(x\sin y - y\cos y) + e^{-x}\sin y = -e^{-x}(x\sin y - \sin y - y\cos y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x}(x\sin y - \sin y - y\cos y) - e^{-x}\sin y$$
$$= e^{-x}(x\sin y - \sin y - y\cos y - \sin y)$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x}(x\sin y - 2\sin y - y\cos y)$$

ولنوجد الآن المشتق بالنسبة لـ y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{-x}x\sin y - e^{-x}y\cos y) = e^{-x}x\cos y - e^{-x}\cos y + e^{-x}y\sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-x}(x\cos y + y\sin y - \cos y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-x}x\sin y + e^{-x}\sin y + e^{-x}\sin y + e^{-x}y\cos y$$
$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-x}(x\sin y - 2\sin y - y\cos y)$$

ونلاحظ بالتعويض في معادلة لابلاس أن :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

إذاً الدالة u توافقية.

تعريف :

إذا كانت الدالتان u, v دالتان توافقيتان في المنطقة D بحيث تكون الدالة : $w = f(z) = u + iv$ تحليلية في D عندئذٍ نسمي الدالة $v(x,y)$ بالمرافق التوافقي للدالة $u(x,y)$ وبالعكس أي أن الدالة $u(x,y)$ هي مرافق توافقي للدالة $v(x,y)$

مثال :

أثبت أن الدالة : $u(x,y) = e^{x}\cos y$ هي دالة توافقية في المستوي العقدي ثم عيّن المرافق التوافقي لها واكتب $f(z)$ بالشكل النهائي

الحل :

$$u(x,y) = e^{x}\cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x}\cos y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{x}\cos y$$

/ /

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{x}\sin y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{x}\cos y$$

نلاحظ أن: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

أي أن الدالة f تحليلية لتحقق معادلة لابلاس التفاضلية.

ونريد الحصول على الدالة ص المرافقة لها.

إن u ، v تحققان شرطي كوشي وريمان:

① $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ② $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

من ①:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^{x}\cos y$$

بالمكاملة بالنسبة لـ y نجد أن:

$$v(x,y) = e^{x}\sin y + \phi(x)$$

لتعيين الدالة $\phi(x)$ نشتق $v(x,y)$ بالنسبة لـ x:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{x}\sin y + \phi'(x)$$

وبالتعويض من ② نجد:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{x}\sin y + \phi'(x) = e^{x}\sin y$$

بالمطابقة يكون: $\phi'(x) = 0$

$\Rightarrow \phi(x) = c$ ثابت

إذاً الدالة المرافقة هي:

$$v(x,y) = e^{x}\sin y + c$$

وبالتالي الدالة f تكتب على الشكل:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$= e^{x}\cos y + i\,(e^{x}\sin y + c)$$

$$= e^{x}\cos y + i\,e^{x}\sin y + ic$$

$$= e^{x}(\cos y + i\sin y) + ic$$

$$\Rightarrow f(z) = e^{x}\cdot e^{iy} + ic = e^{x+iy} + ic$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = e^{z} + ic}$$

/ /

المحاضرة الخامسة — الأربعاء 31/10/2012

تمارين:

1) أثبت أن الدالة: $u = u(x,y) = e^{y}\cos x$

دالة توافقية ثم أوجد الدالة المرافقة لها $v(x,y)$ ثم عبّر عن

التابع $f(z)$ بدلالة z ثم احسب مشتقه.

الحل:

تكون الدالة توافقية إذا حققت:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{y}\sin x \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{y}\cos x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{y}\cos x \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{y}\cos x$$

نلاحظ أن: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{y}\cos x + e^{y}\cos x$

$$= 0$$

إذاً الدالة توافقية.

نبحث عن الدالة المرافقة من شرطي كوشي وريمان:

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$(2) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{y}\sin x = \frac{\partial v}{\partial y}$$

نكامل بالنسبة لـ y فنجد:

$$v(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}\, dy = \int -e^{y}\sin x \, dy$$

$$\Rightarrow v(x,y) = -e^{y}\sin x + \phi(x)$$

نوجد $\frac{\partial v}{\partial x}$ فنجد:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{y}\cos x + \phi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$-e^{y}\cos x + \phi'(x) = -e^{y}\cos x$$

بالمطابقة نجد: $\phi'(x) = 0 \Longrightarrow \phi(x) = C$

/ /

اذاً : $v(x,y) = -e^{y}\sin x + c$

وبهذا يكون التابع :

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$
$$= e^{y}\cos x + i(-e^{y}\sin x + c)$$
$$= e^{y}\cos x - ie^{y}\sin x + ic$$
$$= e^{y}(\cos x - i\sin x) + ic$$
$$= e^{y}\cdot e^{-ix} + ic = e^{y-ix} + c = e^{-i(x+iy)} + c$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(z) = e^{-iz} + c}$$

ولإيجاد المشتق نطبق :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$= -e^{y}\sin x + i(-e^{y}\cos x)$$
$$= -e^{y}\sin x - ie^{y}\cos x$$
$$= -i(e^{y}\cos x + \frac{1}{i}e^{y}\sin x)$$
$$= -ie^{y}(\cos x - i\sin x)$$
$$= -ie^{y}\cdot e^{-ix}$$

$$\Longrightarrow f'(z) = -ie^{y-ix} = -ie^{-i(x+iy)} \Longrightarrow \boxed{f'(z) = -e^{-iz}}$$

B - عيّن α ، β لتكون الدالة التالية توافقية :

$$u = u(x,y) = \alpha x^2 y + \beta y^2 - 3y^3 + 2x^2$$

ثم عيّن v الدالة المرافقة لها ثم اكتب $f(z)$ بدلالة z و احسب مشتقه .

الحل :

بما أن الدالة توافقية فهي تحقق الشرط :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\alpha yx + 4 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\alpha y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha x^2 + 2\beta y - 9y^2 , \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\beta - 18y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$2\alpha y + 4 + 2\beta - 18y = 0$$

$$(2\alpha - 18)y + 4 + 2\beta = 0$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$$\beta = -2 \Longleftarrow 4 + 2\beta = 0$$

$$\alpha = 9 \Longleftarrow 2\alpha - 18 = 0$$

وبهذا تكون الدالة هي:

$$u = u(x,y) = 9x^2y - 2y^2 - 3y^3 + 2x^2$$

إيجاد الدالة المرافقة: v

من شرطي كوشي وريمان:

$$① \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$② \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 18yx + 4x$$

بالمكاملة بالنسبة للمتحول y نجد:

$$v(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dy = 9xy^2 + 4xy + \phi(x)$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ x

من ②

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 9y^2 + 4y + \phi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\Rightarrow 9y^2 + 4y + \phi'(x) = -9x^2 + 4y + 9y^2$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$$\phi'(x) = -9x^2 \Longrightarrow \phi(x) = -3x^3 + c$$

وبهذا تكون الدالة المرافقة: $v(x,y)$:

$$v = v(x,y) = 9xy^2 + 4yx - 3x^3 + c$$

أما التابع $f(z)$ فهو:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$f(z) = 9x^2y - 2y^2 - 3y^3 + 2x^2 + i(9xy^2 + 4xy - 3x^3 + c)$$

$$f(z) = 9x^2y - 2y^2 - 3y^3 + 2x^2 + 9ixy^2 - 4ixy - 3ix^3 + ic$$

$$f(z) = 2(x^2 - y^2 + 2ixy) - 3ix^3 + 3i^2y^3 - 9i^2x^2y + 9ixy^2 + ic$$

$$f(z) = 2(x+iy)^2 - 3i(x^3 - iy^3 + 3ix^2y - 3xy^2) + ic$$

$$\Rightarrow f(z) = 2(x+iy)^2 - 3i(x+iy)^3 + ic$$

$$\boxed{f(z) = 2z^2 - 3iz^3 + ic}$$

لإيجاد المشتق:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= 18xy + 4x + i(9y^2 + 4y - 9x^2)$$

$$= 18xy + 4x + 9iy^2 + 4iy - 9ix^2$$

$$= 4(x+iy) + 9iy^2 - 9ix^2 - 18i^2xy$$

$$= 4(x+iy) - 9i(x^2 - y^2 + 2ixy)$$

$$= 4(x+iy) - 9i(x+iy)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(z) = 4z - 9iz^2}$$

بعض التوابع الشهيرة في الساحة العقدية:

أ- الحدودية من الدرجة n:

ليكن التابع:

$$w = f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

حيث: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ هي ثوابت عقدية.

n: عدد صحيح موجب يسمى «درجة الحدودية».

والتابع الصحيح $f(z)$ من الدرجة n يعد من أبسط التوابع العقدية وهو تابع تحليلي «مستمر وقابل للاشتقاق» في جميع نقاط المستوي العقدي.

ومشتقه في كل نقطة يعطى على الشكل:

$$w' = f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + n a_n z^{n-1}$$

2- التابع الكسري:

$$w = f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} \quad ; \quad f_2(z) \neq 0$$

حيث $f_1(z)$ ، $f_2(z)$ هما تابعان صحيحان «حدوديتان»
والتابع الكسري هو تابع تحليلي (مستمر وقابل للاشتقاق) في
المستوي العقدي باستثناء النقاط التي تجعل: $f_2(z)=0$ المقابلة
لقيم z وعدد هذه النقاط مساوٍ لدرجة حدودية المقام.
وندعو هذه النقاط: «النقاط الشاذة».

3- التابع الأسي:

$$w=f(z)=e^z$$

حيث $z=x+iy$ ويعرّف بالعلاقة:

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}$$

$$=e^x(\cos y+i\sin y)$$

$$\Rightarrow e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y$$

$$e^z=u(x,y)+i\,v(x,y)$$

حيث:

$$u=u(x,y)=e^x\cos y$$

$$v=v(x,y)=e^x\sin y$$

ويتمتع التابع الأسي بالخواص التالية:

1) إذا كان: $z=x$ «$\operatorname{Im} z=0$»

عندئذ $z\in\mathbb{R}$ وبهذا يكون:

$$w=f(z)=e^z=e^x$$

وتكون:
$$\left.\begin{aligned}u&=u(x,y)=e^x\\ v&=v(x,y)=0\end{aligned}\right\}$$

2) إذا كان: $z=iy$ «$\operatorname{Re} z=0$»

وبهذا يكون: $w=f(z)=e^z=e^{iy}$

$$\Rightarrow w=\cos y+i\sin y$$

عندئذ : $\left.\begin{array}{l} u = u(x,y) = \cos y \\ v = v(x,y) = \sin y \end{array}\right\}$

③ التابع الأسي $w = f(z) = e^z$ هو تابع تحليلي في جميع نقاط المستوي العقدي وبتطبيق كوشي ريمان :

$$w = f(z) = e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

$$u = e^x \cos y \quad , \quad v = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

نجد أن شرطي كوشي ريمان محققان.

④ مشتق التابع الأسي هو :

$$w' = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= e^x \cos y + i e^x \sin y$$

$$= e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$= e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy}$$

$$\Rightarrow \quad f'(z) = e^z$$

⑤ بفرض z_1 , z_2 عددان عقديان عندئذ :

* $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$

* $(e^{z_1})^n = e^{n z_1}$

* $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

⑥ بفرض : $z = x + iy$ عندئذ :

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}|$$

$$= |e^x| \cdot |\cos y + i \sin y|$$

$$= |e^x| \cdot (1)$$

$$= |e^x| = e^x$$