قسم التحليل ٢

المحاضرة الأولى: ١٥/٢/٢٠١٥

$$\int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx$$

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

تكامل وتفاضل $\int F'(x)dx = \int dF(x)$

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

خاصية للتكامل: $(f(x) + g(x))\,dx$

$$= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$= \int \sum_{i=1}^{n} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int f_i(x)\,dx$$

خاصية أخرى.

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$$

يجب حفظ هذه الخواص والبرهان عنه مطلوب:

① $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$

② $\int e^x\,dx = e^x + c$

③ $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

برهان الخاصية ٣.

نفرض $y = a^x$

$\ln y = x \ln a$

$\dfrac{y'}{y} = \ln a + 0 \Rightarrow y' = \ln a\, y$

$\dfrac{dy'}{dx} = a^x \ln a$

y'

$dy = a^x \ln a\,dx$

$\dfrac{dy}{\ln a} = a^x\,dx$

$\int \dfrac{dy}{\ln a} = \int a^x\,dx$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\ln a}\int dy = \int a^x\,dx$

$c + \dfrac{y}{\ln a} = \int a^x\,dx$

$\Rightarrow \dfrac{a^x}{\ln a} + c = \int a^x\,dx$

④ $\int \dfrac{dx}{x} = \ln(x) + c$

⑤ $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

⑥ $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

⑦ $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + c$

⑧ $\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\sin x| + c$

⑨ $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

(10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot g\, x + c$

(11) $\int sh\, x\, dx = ch\, x + c$

تكامل الجيب القطعي.

(12) $\int ch\, x\, dx = sh\, x + c$

(13) $\int th\, dx = \ln|ch\, x| + c$

(14) $\int cth\, x\, dx = \ln|sh\, x| + c$

(15) $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\, x + c$

(16) $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\, x + c$

(17) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\frac{x^2}{a^2}+1}$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2} \int a \frac{dy}{y^2+1} =$$

$$\frac{1}{a} \int \frac{dy}{y^2+1}$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} y + c = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$$

$$\frac{x}{a} = y \Rightarrow \frac{dx}{a} = dy$$

(18) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

وتساوي رياضياً:

$= -\arccos x + c$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$\frac{x}{a} = y = \frac{dx}{a} = dy$$

(19) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c$

(20) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \mp a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \mp a^2}\right| + c$

قالت الدكتورة الكتاب مرجعي بالنسبة للنظري

المحاضرة الثانية: ١٨/٢/٢٠١٠

طرق المكاملة:

١- طريقة تغيير المتحول:

$$I = \int f(x).dx \Rightarrow dI = d\int f(x).dx = f(x).dx$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dx} = f(\varphi(t)) \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dx} = \frac{dI}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad (1)$$

سنعوض (1) في (2)

$$\frac{dI}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = f(\varphi(t))$$

SABBAGH STATIONERY

$x' = \varphi'(t) \qquad \dfrac{dx}{dt} = \varphi'(t)$

$\Rightarrow \dfrac{dI}{dt} \cdot \dfrac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t))$

$\dfrac{dI}{dt} = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

$dI = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$

$I = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt$ ← تكامل الطرفين

$I = \int \underset{\text{بدل}}{\varphi}(t) \cdot \varphi'(t) \cdot dt$

أمثلة :

$\boxed{1}$

$I = \int \sin 3x \, dx \qquad 3x = t$

$I = \frac{1}{3} \int \sin t \, dt \qquad 3 \cdot dx = dt$

$= -\dfrac{\cos t}{3} + c \qquad dx = \dfrac{dt}{3}$

$= -\cos \dfrac{3x}{3} + c$

$\boxed{2}$

$I = \int \dfrac{dx}{ax+b} \qquad ax + b = t$

$\Rightarrow a\,dx = dt$

$I = \int \dfrac{\frac{dt}{a}}{t} = \dfrac{1}{a} \int \dfrac{dt}{t} \qquad \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{a}$

$= \frac{1}{a} \ln|t| + c = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$

$\boxed{3}$

$k = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

$x = a\cos t \Rightarrow dx = -a \sin \boxed{x}\, dt$

أو $\quad x = a \sin t$

$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \cos^2 t$

$= a^2 (1 - \cos^2 t)$

$= a^2 \sin^2 t$

$\sqrt{a^2 - x^2} = a \sin t$

$k = -\int a^2 \sin^2 \boxed{t}\, dt = -a^2 \int \sin^2 t \, dt$

$k = -a^2 \int \dfrac{1 - \cos 2t}{2}\, dt =$

$= -\dfrac{a^2}{2} \int (1 - \cos 2t)\, dt$

$= -\dfrac{a^2}{2} \left[t - \dfrac{\sin 2t}{2} \right] + c$

$= \dfrac{a^2}{2} \left(-t + \dfrac{\sin 2t}{2} \right) + c$

$= \dfrac{a^2}{2} \left(-\arccos \dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{2} \sin 2 \arccos \dfrac{x}{a} \right) + c$

$x = a \cos t \Rightarrow \dfrac{x}{a} = \cos t$

$\arccos \dfrac{x}{a} = t$

$\boxed{4}$

$I = \int \dfrac{dx}{x^2 - 2x + 10}$

$= \int \dfrac{dx}{x^2 - 2x + 1 - 1 + 10}$ الإكمال إلى مربع كامل

$= \int \dfrac{dx}{(x-1)^2 + 9} = \int \dfrac{dx}{(x-1)^2 + (3)^2}$

$x - 1 = t \Rightarrow dx = dt$

$I = \int \dfrac{dt}{t^2 + 3^2} = \dfrac{1}{3} \operatorname{arctg} \dfrac{t}{3} + c$

$= \dfrac{1}{3} \operatorname{arctg} \dfrac{(x-1)}{3} + c$

$$\int \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^4 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int tg^2 \frac{dx}{\cos^2 x}$$

فكرة الحل

$$I = \int \frac{dx}{x^2-2x+10}$$

$$= \int \frac{dx}{x^2-2x+1-1+10}$$

$$J = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}$$ نقسم على $\cos^2\frac{x}{2}$

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{tag\frac{x}{2}}$$ $tg\frac{x}{2} = t$

نشتق

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx = dt$$

نعوض

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dt}{t} = Ln(t) + c$$

$$= Ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+13}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+4-4+13}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+3^2}}$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+(3)^2}} = Ln\left|t+\sqrt{t^2+9}\right| + c$$

$$= Ln\left|(x-2)+\sqrt{(x-2)^2+9}\right| + c$$

وظيفة :

$\boxed{5}$

$$\int \cos^3 x \cdot \sin x^4\, dx \qquad \sin x = t$$

فكرة الحل

$\boxed{5}$ $tg\,x = t$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x}\ ,\quad \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$$

$$\int x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$$

نضرب بالمرافق

نعوض $\sqrt{a^2-x^2}$ ونعوض $a^2-x^2=t^2$

المحاضرة الثالثة ٢٢/٢/٢٠١٠

٤- التكامل بالتجزئة.

$$I = \int f(x)\,dx$$

$$I = \int u(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\,du$$

$$u\,dv = d(u\cdot v) - v\,du$$

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\,du$$

$\boxed{6}$ نستخدم هذا القانون عندما يكون لدي كثير حدود في

١- لغ مع مثلثية ٢- أسي مع كثير حدود...

$$I = \int x^n Ln\, x\, dx \qquad (1)$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = x^n dx \Rightarrow v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$I = \frac{x^{n+1}}{n+1} Ln|x| - \int \frac{x^{n+1}\,dx}{x(n+1)}$$

$$I = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln|x| - \int \frac{x^{n}}{n+1}\,dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln|x| - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)} + C$$

$$I = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln|x| - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

② $J = \int (x+1)^2 e^{-x}\,dx$

$u = (x+1)^2 \Rightarrow du = 2(x+1)\,dx$

$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$J = -(x+1)^2 e^{-x} + 2\int \underset{u}{(x+1)}\, \underbrace{e^{-x}dx}_{dv}$

تكامل بالتجزئة مرة ثانية

$J = -(x+1)^2 e^{-x} + 2\left[-(x+1)e^{-x} + \int e^{-x}dx\right]$

$= -(x+1)^2 e^{-x} - 2(x+1)e^{-x} + 2\int e^{-x}dx$

$= -(x+1)^2 e^{-x} - 2(x+1)e^{-x} - 2e^{-x} + C$

③ $K = \int x\,\mathrm{sh}x\,dx$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$\mathrm{sh}x\,dx \Rightarrow dv \Rightarrow v = \mathrm{ch}x$

$K = x\,\mathrm{ch}x - \int \mathrm{ch}x\,dx$

$= x\,\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x + C$

④ $I = \int e^{x} \underset{u}{\sin 2x}\,dx$

أي مثلاً. هنا تكامل بالتجزئة ولا نعرف بالحقيقة التي

علينا أن نكامل أو أن نفاضل حرف يبقى نفسه

$u = \sin 2x \Rightarrow du = 2\cos 2x\,dx$

$dv = e^{x}dx \Rightarrow v = e^{x}$

$I = e^{x}\sin 2x - 2\int e^{x}\cdot 2\underset{u}{\cos 2x}\,dx$

لا نغير بالتسميات u

$\cos 2x = u \Rightarrow du = -2\sin 2x\,dx$

$e^{x}dx = dv = v = e^{x}$

$I = e^{x}\sin 2x - 2\left[e^{x}\cos 2x + 2\int e^{x}\sin 2x\,dx\right]$

$I = e^{x}\sin 2x - 2e^{x}\cos 2x - 4I$

$5I = e^{x}\sin 2x - 2e^{x}\cos 2x$

$$I = \frac{1}{5}\left[e^{x}\sin 2x - 2e^{x}\cos 2x\right] + C$$

⑤ $I = \int 18x^3\cdot\cos 3x^2\,dx$

نفرض :

$3x^2 = t \Rightarrow 6x\,dx = dt$

$18x^3 = 6\cdot 3x^2\cdot x = 6tx \quad , \quad dx = \frac{dt}{6x}$

$18x^3\cdot dx = 6tx\cdot\frac{dt}{6x} = t\cdot dt$

$= \int 6t\cos t\,\frac{dt}{6}$

$= \int \underset{u}{t}\,\underbrace{\cos t\,dt}_{dv}$

SABBAGH STATIONERY

$$I = t\sin t - \int \sin t \, dt$$

$$= t\sin t + \cos t + C$$

نعوض t

$$\boxed{= 3x^2 \sin 3x^2 + \cos 3x^2 + C}$$

تمارين وظيفة :

$\int \arcsin x \, dx$ ، $\int \sin(\ln x) \, dx$

$\int \cos(\ln x) \, dx$ ، $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

$\int \frac{1}{\cos x} tg^2 x$ ، $\int x^2 \cos x \, dx$

٣- التكامل بالتدريج :

$I_n = \underbrace{\sim\sim\sim}$ $\mp$ تكامل ثاني بنفس شكل التكامل

ولكن مختلف بالدليل.

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$$

إذا لاحظنا التعريف نحصل على [illegible]

$$I_{n-1} = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}$$

$$u = \frac{1}{(x^2-a^2)^{n-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow du = \frac{-(n-1)(2x)(x^2-a^2)^{n-2}}{(x^2-a^2)^{2n-2}} dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \int \frac{x(n-1)(2x)}{(x^2-a^2)^n} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2 dx}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2-a^2+a^2}{(x^2-a^2)^n} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\left[\int \frac{x^2-a^2}{(x^2-a^2)^n} + \frac{a^2}{(x^2-a^2)^n} d\right.$$

$$= \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\left[\int \frac{x^2-a^2}{(x^2-a^2)^n} dx + a^2\int \frac{dx}{(x^2-a^2)}\right.$$

$$= \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\left[\int \frac{x^2-a^2}{(x^2-a^2)^n} dx + a^2\int \frac{dx}{(x^2-a}\right.$$

$$= \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2a^2(n-1)\int \frac{dx}{(x^2-}$$

$$= \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1) I_{n-1} + 2a^2(n-1) I_n$$

$$I_{n-1} = \quad // \; I_n$$

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{-x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + (-2n+3) I_{n-1}\right]$$

هذا التمرين معاد في الصفحة

التالية

إعادة التمرين السابق: التكامل بالتدريج

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} \Rightarrow I_{n-1} = \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}$$

$$u = \frac{1}{(x^2-a^2)^{n-1}} \Rightarrow du = \frac{-(n-1)(2x)(x^2-a^2)^{n-1}}{(x^2-a^2)^{2n-2}}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \int \frac{x(n-1)(2x)}{(x^2-a^2)^n} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + \int \frac{x(n-1)(2x)}{(x^2-a^2)^n} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-a^2)^n}$$

$$= \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{(x^2-a^2)^n} \cdot dx$$

$$= \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\left[\int \frac{x^2-a^2}{(x^2-a^2)^n} dx + a^2 \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}\right]$$

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\left[\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2a^2(n-1)\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}\right]$$

$$= \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\, I_{n-1} + 2a^2(n-1)\, I_n$$

$$I_{n-1} = \frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + 2(n-1) I_{n-1} + 2a^2(n-1)\, I_n$$

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[-\frac{x}{(x^2-a^2)^{n-1}} + (-2n+3)\, I_{n-1}\right]$$

③ $I_n=\int \cos^n x\,dx$

$=\int \underbrace{\cos^{n-1}}_{u} x\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv}$

$u=\cos^{n-1}x \Rightarrow \underbrace{-(n-1)\sin x\cos^{n-2}x\,dx}_{}=du$

$dv=\sin x\,dx \Rightarrow v=\sin x$

$I_n=\sin x\cos x^{n-1}+(n-1)\int \cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx$

$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int \cos^{n-2}(1-\cos^2 x)\,dx$

$I_n=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\underbrace{\int \cos^{n-2}x\,dx}_{I_{n-2}}-\underbrace{(n-1)\int \cos^n x\,dx}_{I_n}$

$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$

$I_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$

④ $I_n=\int x^m(\ln x)^n\,dx$

$I_{n-1}=\int x^m(\ln x)^{n-1}\,dx$

$(\ln x)^n=u \Rightarrow \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}dx=du$

$x^m dx=dv \Rightarrow v=\frac{x^{m+1}}{m+1}$

تمارين منزلية: $I_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

② $I_n=\int tg^n x\,dx$

نفرض $\cancel{I_n=\int tg^{n-2}x\cdot tg^2 x\,dx}$

$\cancel{=\int tg^{n-2}x\cdot(1+tg^2x-1)\,dx}$

$\cancel{=\int tg\,x=t \Rightarrow (1+tg^2x)\,dx=dt}$

$\cancel{\Rightarrow I_n=\int t^{n-2}(}$

$I_n=\int tg^{n-2}x\cdot tg^2x\,dx$

$=\int tg^{n-2}(1+tg^2x-1)\,dx$

$tg\,x=t \Rightarrow (1+tg^2x)\,dx=dt$

$=\int tg^{n-2}x\,(1+tg^2x)\,dx-\int tg^{n-2}x\,dx$

$I_n=\int t^{n-2}\,dt-I_{n-2}$

$I_n=\frac{t^{n-1}}{n-1}-I_{n-2}$

$I_n=\frac{tg\,x^{n-1}}{n-1}-I_{n-2}$

$$I_n = \frac{(\ln x)^n\, x^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int \frac{x^{m+1}(\ln x)^{n-1}}{x}\,dx$$

$$I_n = \frac{(\ln x)^n\, x^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int \underbrace{x^m(\ln x)^{n-1}\,dx}_{I_{n-1}}$$

$$I_n = \frac{(\ln x)^n\, x^{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1}\, I_{n-1}$$

$$I_n = \int (x^2+a^2)^n\,dx$$ تمرين الوظيفة.

المحاضرة الرابعة... ١/ ٣ / ٢٠١٠م.

[illegible]

$$Q_{n,m} = \int \frac{(2ax+b)^m}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx \quad [illegible] \quad 1 \le m,n \in \mathbb{Z}^*$$

$$Q_{n-1,m-2} = \int \frac{(2ax+b)^{m-2}}{(ax^2+bx+c)}\,dx$$

$$u = \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \Rightarrow du = \frac{-(n-1)(2ax+b)(ax^2+bx+c)^{n-2}}{(ax^2+bx+c)^{2n-2}}\,dx$$

$$= \frac{-(n-1)(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx \qquad \int (y)^m = \frac{y^{m+1}}{m+1}$$

$$dv = (2ax+b)^{m-2}\,dx \Rightarrow v = \frac{(2ax+b)^{m-1}}{2a(m-1)} \qquad \int (2ya)^m = \frac{(2ay)^{m+1}}{2a(m+1)}$$

$$Q_{n-1,m-2} = \frac{(2ax+b)^{m-1}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}(2a(m-1))} + \frac{(n-1)}{2a(m-1)}\int \frac{(2ax+b)^{m-1}(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)}$$

$$= \frac{(2ax+b)^{m-1}}{2a(m-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{n-1}{2a(m-1)}\, Q_{n,m}$$

$$Q_{n,m} = \frac{2a(m-1)}{n-1} Q_{n-1,m-2} - \frac{(2ax+b)^{m-1}}{(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} \quad *$$

في البسط

② $$\int \frac{x^4}{(x^2+3)^3} = \frac{1}{16}\int \frac{(2x)^4}{(x^2+3)^3}\,dx \quad ①$$ حاذفين بقوس ٤ ثم مضاعفين

$m=4$, $n=3$

$a=1$ $b=0$ $c=3$ * نعوض ب

$$Q_{4,3} = \frac{1}{16}\int \cancel{\frac{2(3)}{}}$$

$$Q_{4,3} = \frac{1}{16}\int \frac{(2x)^4}{(x^2+3)^3} = \frac{1}{16}\left[\frac{2(3)}{2} Q_{2,2} - \frac{(2x)^3}{2(x^2+3)^2}\right]$$

$$Q_{4,3} = \frac{1}{16}\left[3Q_{2,2} - \frac{(2x)^3}{2(x^2+3)^2}\right] \qquad m=2 \quad n=2$$

$$Q_{4,3} = \frac{1}{16}\left[3\left[2Q_{1,0} - \frac{(2x)}{(x^2+3)}\right] - \frac{(2x)^3}{2(x^2+3)^2}\right]$$

$$= \int \frac{1}{(x^2+3)}\,dx$$ هنا عوضنا في الأصلي معوضنا

$n=1$ $m=0$ أي في ①

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$$